



ПЕРЕДМОВА

Даний посібник присвячений такій простій і водночас та-кій складній темі, як задачі на дії із цілими числами.

Уже в початковій школі діти знають ділення як дію, обернену до множення, вміють ділити натуральні числа з остачею, знають, що таке просте число, а відтак, обчислюють НСД і НСК двох чисел, вивчають ознаки подільності. Проте на математичних олімпіадах та на іспитах з математики (ЗНО) саме завдання з елементарної теорії чисел є найскладнішими для учнів та абітурієнтів.

Теоретичний матеріал посібника систематизує знання учнів з таких тем, як поняття простого і складеного чисел, ознаки подільності, ділення з остачею тощо.

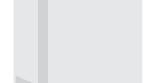
Окрім того, матеріал з елементарної теорії чисел узагальнюється і поглибується. Розглядаються закономірності цифрового запису числа, зокрема при його піднесенні до степеня, подільність і остача, властивості остач, теорія лишків, розв'язування рівнянь у цілих числах та їхнє застосування (наприклад, у тригонометрії), застосування властивостей подільності в задачах логічного й практичного спрямування, у задачах на виграшну стратегію гри тощо.

Наводяться приклади використання нестандартних методів розв'язування задач у теорії чисел, таких як принцип Діріхле, метод математичної індукції.

Посібник містить багато прикладів і завдань різного рівня складності – від найпростіших до олімпіадних. Майже до всіх завдань наприкінці посібника наведено повні розв'язання або детальні вказівки.

Щоб розв'язувати запропоновані задачі, досить знати курс математики за вісім класів. Зауважимо, що більшість задач посібника (особливо § 1 і § 2) доступні учням 6 і 7 класів та можуть бути використані для організації позакласної роботи із цими учнями.

На відміну від існуючої літератури з теорії чисел, основна увага в посібнику приділяється систематизації та розв'язуванню задач з елементарних понять про число та його властивості, що вивчаються в курсі загальноосвітньої школи. Це матеріал § 3 і § 4, третина прикладів та третина дидактичного матеріалу. Саме цей матеріал може бути *основою курсу за вибором для загальноосвітніх навчальних закладів*. Його усвідомлення сприятиме чіткому розумінню математич-





них фактів та логіки математичних доведень, що у свою чергу породжує прагнення до самостійних математичних досліджень. Останнє є головною метою профільної орієнтації.

Для профільного навчання, курсу за вибором у класах із поглибленим вивченням математики, підготовки групи учнів до математичних змагань пропонується поглибити знання з теорії чисел такими математичними фактами, як властивості порівнянь, розв'язування невизначених рівнянь, велика й мала теореми Ферма, алгоритм Евкліда, метод математичної індукції тощо.

Зрозуміло, що класи профільного навчання, поглибленаого вивчення математики, підготовка до різних етапів математичних змагань також потребують задач різного рівня складності, залежно від особливостей конкретної групи учнів. Тому, з метою полегшення роботи вчителя, в усіх завданнях виділено два рівні складності. Зірочкою позначено більш складний теоретичний та дидактичний матеріал.

У *Додатку 1* пропонується орієнтовна дворівнева програма відповідного курсу за вибором.

Зауважимо, що, враховуючи багаторівневість посібника, за ним можуть працювати як школярі 7–11 класів, так і абитурієнти. Вчителям він допоможе у проведенні позакласних занять (зокрема, курсу за вибором) з теорії чисел, організації вивчення певних тем у класах із поглибленим вивченням математики.

Закінчити передмову хочу висловлюванням Г.Х. Харді:

«*Елементарна теорія чисел є одним з найкращих предметів для початкової математичної освіти. Вона вимагає мало базових знань; методи міркувань, що застосовуються у ній, прості й загальні, їх небагато; серед математичних наук немає подібної у зверненні до природної людської допитливості».*





Розділ I

АРИФМЕТИКА ЦІЛИХ ЧИСЕЛ

§ 1. Означення і найпростіші властивості подільності

ПРОСТИ І СКЛАДЕНІ ЧИСЛА

Ви, безумовно, знаєте, що серед натуральних чисел (їх множину прийнято позначати N) є прості числа і складені числа.

Число називається **складеним**, якщо його можна представити як добуток двох менших натуральних чисел, більших за 1. Наприклад, $6 = 2 \cdot 3$ – число складене.

Якщо число ділиться тільки саме на себе і на 1, то таке число називають **простим**.

Наприклад, $3 = 1 \cdot 3$ – просте число.

Одніця не є простим числом і не є складеним числом.

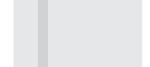
Два числа називають **взаємно простими**, якщо вони не мають спільних множників. Зрозуміло, що два різних простих числа завжди будуть взаємно простими.

Наприклад, число 120 можна розкласти на прості множники так: $120 = 12 \cdot 10 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$. Якщо спробувати розкласти це число на множники інакше, наприклад, почавши так: $120 = 40 \cdot 3$, то отримаємо в результаті все одно такий самий розклад на прості множники. Цей факт, що є інтуїтивно очевидним (проте який не так уже й легко довести), називають ОСНОВНОЮ ТЕОРЕМОЮ АРИФМЕТИКИ:

Кожне натуральне число можна розкласти на прості множники, причому єдиним чином.

Фактично всі властивості подільності, які ми будемо розглядати далі, базуються саме на цій теоремі.

Кажуть, що ціле число a **ділиться** на ціле число p (або a **кратне** числу p), якщо знайдеться таке ціле число c , що $a = pc$. Причому число p називають **дільником** числа a . Позначають це так: $a : p$.





ВЛАСТИВОСТІ ПОДІЛЬНОСТІ

Спираючись на основну теорему арифметики, легко довести такі властивості подільності цілих чисел* (пропонуємо зробити це самостійно).

1. Якщо число X ділиться на m , то і число nX ділиться на m .
 2. Якщо деяке число ділиться на два взаємно простих числа n і m , то воно ділиться і на їхній добуток nm .
 3. Якщо число nX ділиться на m , де n і m взаємно прості, то X ділиться на m .
 4. Якщо числа a і b взаємно прості, то з того, що $a : d$ і $b : d$, випливає, що $d = \pm 1$.
 5. Якщо числа a і b діляться на c , то і їхня сума $a + b$ та різниця $a - b$ теж діляться на c .
 6. Якщо a ділиться на c , а b ділиться на d , то добуток ab ділиться на cd .
 7. Якщо число b та різниця $a - b$ діляться на c , то й число a також ділиться на c (оскільки $a = b + (a - b)$).
- Ці твердження часто використовуються при розв'язуванні задач. Так *наслідком* з властивостей (1) і (5) маємо таке.
8. Якщо число X ділиться на m , то і число $X + nm$ ділиться на m .
- А з (8) для *послідовності* чисел на *числовій осі* маємо твердження.
9. На числовій осі:
 - серед двох послідовних чисел – одне парне;
 - з трьох послідовних чисел – одне ділиться на 3;
 - із чотирьох послідовних чисел – одне ділиться на 4;
 -
 - з n послідовних чисел – одне ділиться на n .

Приклад 1 Доведіть, що для довільного цілого числа n діляться на 2 числа: а) $n^2 + 3n$; б) $3n^2 + n$.

Розв'язання

- 1) Розкладемо задані вирази на множники:
а) $n^2 + 3n = n(n + 3)$; б) $3n^2 + n = n(3n + 1)$.
- 2) Якщо число n є парним, то твердження, які треба довести, виконуються.

* Загальне зауваження: далі під поняттям «число» маємо на увазі, що ми працюємо на множині цілих чисел.





3) Якщо число n є непарним, то: а) число $n + 3$ – парне і $3n^2 + n$ ділиться на 2; б) число $3n$ – непарне, число $3n + 1$ – парне і $3n^2 + n$ ділиться на 2.

Що й вимагалося довести (Щ. в. д.).

Приклад 2 Доведіть, що для довільного простого числа p , $p > 3$, число $p^2 - 1$ ділиться на 12.

Розв'язання

1) Маємо $p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1)$. За умовою $p > 3$ і p – просте, тоді p – непарне, звідси числа $(p - 1)$ і $(p + 1)$ – парні.

2) Число p не ділиться на 3. Тоді одне із чисел $(p \pm 1)$ кратне числу 3.

3) Маємо, що число $p^2 - 1$ ділиться на 4 і на 3, тоді $(p^2 - 1) \vdots 12$.

Щ. в. д.

Приклад 3 Число p – просте, більше за 3. Доведіть, що число $p^2 - 1$ кратне числу 24.

Розв'язання

Аналогічно до попереднього прикладу представимо задане число у вигляді $(p - 1)(p + 1)$. Доведемо, що обидва множники $(p - 1)$ і $(p + 1)$ не тільки парні, а ще й один з них ділиться на 4. Скористаємося методом від супротивного.

Нехай обидва числа $(p - 1)$ і $(p + 1)$ не діляться на 4. Число p – просте і не може бути кратним числу 4. Тоді одне із чисел $(p - 2)$ і $(p + 2)$ ділиться на 4 (бо із чотирьох послідовних чисел одне кратне числу 4), тобто або $(p - 2)$, або $(p + 2)$ є парним.

З останнього випливає, що буде парним або число $(p - 2) + 2 = p$, або $(p + 2) - 2 = p$, чого бути не може.

Тоді (враховуючи приклад 2) задане число $p^2 - 1$ ділиться на добуток чисел 2, 3, 4, тобто на 24.

Щ. в. д.

Зауважимо, що в прикладі 3 ми довели ще одну корисну властивість цілих чисел:

10. Одне з двох послідовних парних чисел ділиться на 4.

Приклад 4 Доведіть, що добуток чотирьох послідовних натуральних чисел ділиться на 24.

Розв'язання

Серед чотирьох послідовних натуральних чисел два парних, причому одне з них ділиться на 4; одне ділиться на 3. Отже, маємо подільність заданого добутку на $2 \cdot 4 \cdot 3 = 24$. *Щ. в. д.*





Доведемо від супротивного таку властивість двох послідовних натуральних чисел.

11. Два послідовних числа n і $n + 1$ є взаємно простими.

Нехай ці числа мають спільний множник d . Тоді і різниця цих чисел $((n + 1) - n)$ теж ділиться на d . Звідси $d = 1$.

Приклад 5 Доведіть, що найменший (відмінний від 1) дільник складеного числа N не перевищує квадратного кореня із числа N .

Розв'язання

Нехай d – найменший дільник числа N . Тоді $N = kd$, де $k \geq d$. Тоді $d^2 \leq N$ і d не перевищує квадратного кореня із числа N .

Щ. в. д.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ НА ПАРНІСТЬ

Інколи олімпіадну, складну, на перший погляд, задачу допомагає розв'язати просте міркування про збереження (*інваріант*) парності числа.

Приклад 6 На дошці записано чотири числа: 4, 7, 11, 13. Дозволено до довільних двох з них додати по одиниці й записати отримані суми замість двох обраних чисел. Чи можна таким способом зробити всі числа рівними?

Розв'язання

Сума чотирьох рівних чисел – парне число, а сума заданих чисел – непарна (бо одне із цих чисел парне, а три – непарних). Додавання будь-якої кількості двійок ($1 + 1$) до цих чисел не змінить парності їхньої суми. Отже, ці числа не можна зробити рівними.

Відповідь. Ні.

Приклад 7 На чудо-дереві ростуть 25 бананів і 30 апельсинів. Кожного дня Чудо-юдо зриває два плоди, замість яких виростає один новий – апельсин, якщо було зірвано два однакових фрукти, або банан, якщо зірвали два різних фрукти. Яким буде той фрукт, що залишиться на цьому дереві останнім?

Розв'язання

Парність кількості бананів не змінюється в обох варіантах зривання плодів. Початкова кількість бананів непарна,





тому кількість бананів залишається непарною. Отже, останнім фруктом може бути лише банан.

Відповідь. Банан.

РОЗКЛАДАННЯ НА ПРОСТИ МНОЖНИКИ І ПОВНИЙ КВАДРАТ ЧИСЛА

Зауважимо таке.

- 12. Якщо розклад числа на прості множники має вигляд:**
 $a = p_1^{q_1} \cdot p_2^{q_2} \cdot \dots \cdot p_n^{q_n}$, то кількість дільників числа a дорівнює $(q_1 + 1)(q_2 + 1)\dots(q_n + 1)$.

Наприклад, число 5 має $(1+1)$ два дільники: 1 і 5. Число $6 = 2 \cdot 3$ має $(1+1)(1+1)$ чотири дільники: $\mathcal{D} = \{2; 3; 1; 6\}$. Число $16 = 2^4$ має 5 дільників: $\mathcal{D} = \{1; 2; 4; 8; 16\}$.

- 13. Якщо розклад числа на прості множники має вигляд**
 $a = p_1^{q_1} \cdot p_2^{q_2} \cdot \dots \cdot p_n^{q_n}$, то a є повним квадратом тоді і тільки тоді, коли кожний з показників степеня q_1, q_2, \dots, q_n – число парне.

Доведемо два корисних опорних факти про повний квадрат числа.

- 14. Якщо число є повним квадратом, то воно має непарну кількість дільників; якщо число не є повним квадратом, то кількість його дільників – число парне.**

Доведення

Нехай $a = p_1^{q_1} \cdot p_2^{q_2} \cdot \dots \cdot p_n^{q_n}$ – розклад заданого числа на прості множники. Тоді кількість дільників числа a дорівнює $N = (q_1 + 1)(q_2 + 1)\dots(q_n + 1)$. Число a є повним квадратом тоді і тільки тоді, коли кожний з показників степеня q_1, q_2, \dots, q_n – число парне. Тоді всі числа $(q_1 + 1), (q_2 + 1)\dots(q_n + 1)$ – непарні і N – непарне.

Якщо a не є повним квадратом, то хоча б одне із чисел q_1, q_2, \dots, q_n є непарним, наприклад q_i . Тоді $(q_i + 1)$ – число парне і N – парне.

Щ. в. д.

- 15. Якщо добуток взаємно простих чисел – повний квадрат, то кожне із цих чисел є повним квадратом.**

Доведення

- 1) Розглянемо випадок двох множників. Нехай $ab = d^2$. Кожне із чисел a і b можна розкласти на прості множни-





ки, причому ці розклади не містять однакових простих чисел. Розклад правої частини на прості множники містить прості числа в парному степені. Тоді розклади на прості множники кожного із чисел a і b містять кожне з указаних простих чисел у парному степені, тобто a і b є повними квадратами.

2) Розглянемо випадок трьох множників. Нехай $abc = d^2$.

Розглянемо ліву частину співвідношення як добуток двох множників ab і c . Тоді, за доведеним у п. 1, кожний із цих множників, ab і c , – повний квадрат. Якщо ab повний квадрат, то (за п. 1) – і a , і b є повними квадратами. Маємо, що кожний з трьох множників – повний квадрат.

3) Аналогічно доводиться твердження для добутку довільної кількості взаємно простих множників.

Щ. в. д.

НАЙБІЛЬШИЙ СПІЛЬНИЙ ДІЛЬНИК І НАЙМЕНШЕ СПІЛЬНЕ КРАТНЕ

Сформулюємо ще два важливих означення.

Найбільшим спільним дільником (скорочено НСД) двох натуральних чисел називають найбільше натуральне число, що є дільником обох даних чисел. Наприклад, НСД (12; 8) = 4.

Найменшим спільним кратним (скорочено НСК) двох натуральних чисел називається найменше натуральне число, що ділиться на кожне з даних чисел. Наприклад, НСК (12; 8) = 24.

Приклад 8 Дано два числа $a = 2^3 \cdot 3^{10} \cdot 5 \cdot 7^2$ і $b = 2^5 \cdot 3 \cdot 11$. Знайдіть: а) НСД ($a; b$); б) НСК ($a; b$).

Розв'язання

а) Шуканий НСД – спільна частина розкладу даних чисел на прості множники, тобто НСД ($a; b$) = $2^3 \cdot 3 = 24$.

б) Шукане НСК – об'єднання розкладу даних чисел на прості множники, тобто НСК ($a; b$) = $2^5 \cdot 3^{10} \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11$.

Відповідь. а) 24; б) $2^5 \cdot 3^{10} \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11$.

Приклад 9 Знайдіть найменше число, яке ділиться на 36, 57 і 95.

Розв'язання

Шукане число дорівнює НСК (36; 57; 95). Розкладемо задані числа на прості множники: $36 = 2^2 \cdot 3^2$, $57 = 3 \cdot 19$, $95 = 5 \cdot 19$.

Кожний множник p^r (p – просте число), що є у розкладі даних чисел, входить множником до НСК цих чисел. Маємо





НСК (36; 57; 95) = $2^2 \cdot 3^2 \cdot 19 \cdot 5 = 3420$.

Відповідь. 3420.

Приклад 10 Доведіть, що для довільних натуральних чисел a і b , правильним є співвідношення НСД ($a; b$) · НСК ($a; b$) = ab .

Розв'язання

Позначимо спільну частину розкладу даних чисел на прості множники як C . Тоді кожне з даних чисел можна представити у вигляді $a = A \cdot C$ і $b = B \cdot C$, де числа A і B не мають спільних множників (взаємно прості).

Зрозуміло, що НСД ($a; b$) = C , НСК ($a; b$) = $A \cdot C \cdot B$. Звідси маємо: НСД ($a; b$) · НСК ($a; b$) = $C \cdot A \cdot C \cdot B = ab$.

Щ. в. д.

Приклад 11 Доведіть, що для довільних натуральних чисел a і b правильним є співвідношення

$$\text{НСД} (a; a + b) = \text{НСД} (a; b).$$

Розв'язання

Позначимо спільну частину розкладу чисел a і b на прості множники як C . Тоді кожне з даних чисел можна представити у вигляді $a = A \cdot C$ і $b = B \cdot C$, де числа A і B не мають спільних множників (взаємно прості).

Маємо $a + b = C(A + B)$, де числа A і $(A + B)$ взаємно прості (бо спільний множник чисел A і $A + B$ є спільним множником числа B).

Зрозуміло, що НСД ($a; b$) = $C = \text{НСД} (a; a + b)$.

Щ. в. д.

Приклад 12 Знайдіть два натуральні числа, сума яких дорівнює 35, а найменше спільне кратне дорівнює 42.

Розв'язання

Позначимо спільну частину шуканих чисел X і Y як C . Тоді $X = AC$, $Y = BC$, де числа A і B взаємно прості. За умовою: $C(A + B) = 35$ і $CAB = 42$. Спільним множником чисел 42 і 35 є число 7. Тоді $C = 7$, $A + B = 5$, $AB = 6$. Звідси $X = 7 \cdot 2 = 14$, $Y = 7 \cdot 3 = 21$.

Відповідь. 14 і 21.

Приклад 13 Різниця двох непарних натуральних чисел дорівнює 4. Знайдіть НСД цих чисел.



Розв'язання

Нехай A і B – шукані числа, $A - B = 4$. Непарні числа не мають парних дільників. Нехай A і B мають непарний спільний множник. Він є дільником числа $A - B$, тобто менший від 4.

Тоді можливий єдиний випадок: $A = 3n$, $B = 3m$, $A - B = 3(n - m)$, де n і m – цілі числа. Рівність $3(n - m) = 4$ неможлива (число $(n - m)$ – ціле). Звідси A і B – взаємно прості і НСД $(A; B) = 1$.

Відповідь. 1.

*ФУНКЦІЯ ЕЙЛЕРА

Приклад 14 Скільки існує чисел, менших від n і взаємно простих з ним, якщо $n = 2^6 \cdot 3^5$?

Розв'язання

Позначимо: n_2 – кількість чисел, що не перевищують n і діляться на 2; n_3 – кількість чисел, що не перевищують n і діляться на 3; n_6 – кількість чисел, що не перевищують n і діляться на 6.

За властивістю (9) маємо: $n_2 = \frac{n}{2}$; $n_3 = \frac{n}{3}$; $n_6 = \frac{n}{6}$.

Числа, взаємно прості з n , не повинні ділитися ні на 2, ні на 3. Кількість таких чисел дорівнює: $n - n_2 - n_3 + n_6 = n - \frac{n}{2} - \frac{n}{3} +$

$$+ \frac{n}{6} = n \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 2^6 \cdot 3^5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = 2^6 \cdot 3^4.$$

Відповідь. $2^6 \cdot 3^4$.

Зазначимо, що кожному натуральному числу $n > 1$ можна поставити у відповідність числа, менші від цього числа n і взаємно прості з ним. Кількість таких чисел записують як $\Omega(n)$ і називають *функцією Ейлера*.

Наведемо деякі *властивості функції Ейлера*:

- 1) $\Omega(n) < n$;
- 2) якщо $n = p$ – просте число, то $\Omega(n) = p$;
- 3) для $n > 2$ $\Omega(n)$ – парне;
- 4) якщо $n = p^\alpha$ – степінь простого числа p , то $\Omega(n) = p^\alpha \left(1 - \frac{1}{p}\right)$;
- 5) загальна формула для $\Omega(n)$ така:





$\Omega(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_m}\right)$, де p_1, p_2, \dots, p_m – усі прості множники, на які ділиться n .

ПРО ПОДІЛЬНІСТЬ СУМИ І РІЗНИЦІ ДВОХ ЧИСЕЛ

Розглянемо ще кілька прикладів на подільність суми і різниці чисел.

Приклад 15 Доведіть, що для довільного натурального $n > 1$ число $n^4 + 4$ є складеним.

Розв'язання

Маємо $n^4 + 4 = (n^2 + 2)^2 - 4n^2 = (n^2 + 2n + 2)(n^2 - 2n + 2)$.

Щ. в. д.

Приклад 16 Числа a і b – цілі і не дорівнюють 0, причому $5a = 3b$. Доведіть, що $a + b$ – складене число.

Розв'язання

З умови випливає, що $a : 3$ і $b : 5$, тобто a і b можна записати як $a = 3n$ та $b = 5m$, де n і m – цілі числа. Тоді співвідношення $5a = 3b$ можна записати: $5(3n) = 3(5m)$, тобто $n = m$. Маємо, що шукана сума дорівнює $a + b = n(3 + 5) = 8n$, тобто є числом складеним.

Щ. в. д.

Приклад 17 Доведіть, що при кожному цілому n число $n^3 - 3n^2 + 2$ ділиться на 6.

Розв'язання

$n^3 - 3n^2 + 2 = n(n - 1)(n - 2)$. З послідовності трьох цілих чисел принаймні одне ділиться на 3 і одне – на 2. Тоді за властивістю 2 добуток цих чисел ділиться на 6.

Щ. в. д.

Приклад 18 Доведіть, що $a^5 + b^5$ ділиться на $a + b$.

Розв'язання

Вираз $a^5 + b^5$ можна розкласти на множники:

$$a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4).$$

За властивістю 1 вираз $a^5 + b^5$ ділиться на $a + b$. Щ. в. д.



Приклад 19 Доведіть, що $a^8b + ab^8$ ділиться на $a^2b + ab^2$.

Розв'язання

Скористаємося тотожностями:

$$a^8b + ab^8 = ab(a^7 + b^7),$$

$$a^7 + b^7 = (a + b)(a^6 - a^5b + a^4b^2 - a^3b^3 + a^2b^4 - ab^5 + b^6),$$

$$a^8b + ab^8 = ab(a + b)(a^6 - a^5b + a^4b^2 - a^3b^3 + a^2b^4 - ab^5 + b^6),$$

$$a^2b + ab^2 = ab(a + b).$$

Тоді за властивістю 2 шукане твердження виконується.

Щ. в. д.

Зауважимо, що в останніх прикладах ми скористалися тим, що

16*. $a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a + b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - \dots - ab^{2n-1} + b^{2n})$, де $n \in N$.

Доведемо твердження 16. Допоможе це зробити послідовність

$$a^{k-1}; -a^{k-2}b; a^{k-3}b^2; \dots; -ab^{k-2}; b^{k-1}.$$

Це – геометрична прогресія з першим членом a^{k-1} і знаменником $\left(-\frac{b}{a}\right)$. Знайдемо суму перших n членів цієї прогресії:

$$S_k = \frac{a^{k-1} + \frac{b^k}{a}}{1 + \frac{b}{a}} = \frac{a^k + b^k}{a + b}.$$

Неважко довести ще одну формулу скороченого множення.

17*. $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$, де $n \in N$.

Спробуйте зробити це самостійно. (*Порада*: розгляньте окремо випадки: n – непарне і n – парне. У першому випадку у формулі (16) виконайте заміну b на $(-b)$. У другому випадку скористайтесь формулою різниці квадратів двох чисел.)

При $n = 2$ і $n = 3$ з (16) отримаємо відомі зі шкільного курсу алгебри формули скороченого множення для різниці квадратів і різниці кубів відповідно.

Зазначимо ще такий корисний факт, що випливає з (16–17).





18*. Різниця однакових парних степенів ділиться на суму і різницю основ.

Приклад 20* Доведіть, що число $z = 15^n - 8^n + 6 \cdot 36^n + 1$ ділиться на 14 при довільному натуральному значенні числа n .

Розв'язання

1) За наведеними вище формулами маємо:

$$15^n - 8^n = (15 - 8)(15^{n-1} + 15^{n-2} \cdot 8 + \dots + 15 \cdot 8^{n-2} + 8^{n-1});$$

$$6 \cdot 36^n + 1 = 6^{2n+1} + 1 = (6 + 1)(6^{2n} - 6^{2n-1} + \dots - 6 + 1).$$

Тобто обидва доданки числа z діляться на 7 і число z ділиться на 7.

2) Числа $15^n + 1$ і $8^n + 6 \cdot 36^n$ – парні, тоді число z ділиться на 2.

3) Число z ділиться на 7 і на 2, тобто ділиться на 14.

Щ. в. д.

Приклад 21 Доведіть, що при всякому натуральному n число $3^{6n} - 2^{6n}$ ділиться на 35.

Розв'язання

Різниця однакових парних степенів ділиться на суму основ. Тому $3^{6n} - 2^{6n} = 27^{2n} - 8^{2n}$ ділиться на $27 + 8 = 35$.

Щ. в. д.

Приклад 22 Знайдіть усі натуральні числа n , для яких дріб $\frac{15n^2 + 8n + 6}{n}$ є натуральним числом.

Розв'язання

Маємо $\frac{15n^2 + 8n + 6}{n} = 15n + 8 + \frac{6}{n}$. Звідси шукані значення n є дільниками числа 6.

Відповідь. $n \in \{1; 2; 3; 6\}$.

Приклад 23 При яких цілих значеннях x дріб $\frac{4x + 3}{2x - 1}$ буде скоротним?

Розв'язання

Маємо $\frac{4x + 3}{2x - 1} = \frac{2(2x - 1) + 2 + 3}{2x - 1} = 2 + \frac{5}{2x - 1}$. Знайдемо шука-



ні значення x з умови, що число $\frac{5}{2x-1}$ є цілим: $2x-1 = \pm 1$;

$2x-1 = \pm 5$. Звідси $2x \in \{0; 2; -4; 6\}$, $x \in \{0; 1; -2; 3\}$.

Відповідь. $x \in \{0; 1; -2; 3\}$.

Приклад 24 Визначте, при яких цілих значеннях a дріб $\frac{5a+2}{8a+3}$ буде скоротним.

Розв'язання

Нехай число m – спільний дільник чисел $5a+2$ і $8a+3$. Тоді число m – спільний дільник чисел $8(5a+2)$ і $5(8a+3)$, а також їхньої різниці $(40a+16) - (40a+15) = 1$. Тобто $m \equiv 1$ і даний дріб нескоротний.

Відповідь. Даний дріб нескоротний.

Приклад 25 Числа $7n+1$ і $8n+3$ діляться на деяке натуральне число $d \neq 1$. Знайдіть d .

Розв'язання

Оскільки $7n+1$ і $8n+3$ за умовою діляться на d , то і число $7(8n+3) - 8(7n+1) = 13$ теж ділиться на d . Тоді $d = 13$ (бо $d \neq 1$, а 13 – просте число).

Відповідь. 13.

Приклад 26* Доведіть, що різниця

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 2011 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2012$$

ділиться на 2013.

Розв'язання

Запишемо задану різницю у вигляді:

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 2011 - (2013 - 2011)(2013 - 2009) \cdot \dots \cdot (2013 - 1).$$

Останній вираз має лише два доданки, що не містять множником число 2013, це

$$\begin{aligned} &1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 2011 - (-2011)(-2009) \cdot \dots \cdot (-1) = \\ &= 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 2011 - 2011 \cdot 2009 \cdot 2007 \cdot \dots \cdot 1(-1)^{\frac{2012}{2}} = 0. \end{aligned}$$

Тобто задана різниця кратна числу 2013.

Щ. в. д.

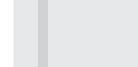




ЗАВДАННЯ 1

Порада. При розв'язуванні задач пам'ятаймо:

- якщо питаютъ: «Чи є правильним твердження?», то мається на увазі: «Чи виконується сформульована умова у всіх можливих випадках?»;
 - для доведення тверджень часто приходить на допомогу метод від супротивного;
 - якщо потрібно показати, що твердження не виконується, то достатньо навести один приклад цього (кажуть «контрприклад»);
 - сума парної кількості непарних чисел – парна;
 - парність суми кількох чисел залежить лише від парності числа непарних доданків: якщо число непарних доданків (не)парне, то і сума їхня – (не)парна;
 - від'ємні числа також бувають парними й непарними;
 - нуль – число парне.
1. Чи може сума чотирьох послідовних натуральних чисел бути простим числом?
 2. Чи можна розкласти 30 камінців на три купки так, щоб число камінців у кожній купці було непарним?
 3. Чи можна розміняти 25 тугриків за допомогою десяти купюр номіналом 1, 3 і 5 тугриків?
 4. У рядок виписали числа від 1 до 10. Чи можна розставити між ними знаки «+» та «–» так, щоб значення отриманого виразу дорівнювало нулю?
 5. Усі сторінки зошита у 96 аркушів пронумерували послідовно числами від 1 до 192. Із цього зошита вирвали 25 аркушів і обчислили суму чисел, що на них написано. Чи може така сума дорівнювати 2012?
 6. Дано p і q – різні прості числа. Скільки дільників у числа: а) pq ; б) p^2q ; в) p^2q^2 ; г) p^nq^m ?
 7. Дано $a = 2^8 \cdot 5^3 \cdot 7^2$ і $b = 2^5 \cdot 3 \cdot 5^7$. Знайдіть: а) кількість дільників даних чисел; б) НСД (a ; b); в) НСК (a ; b).
 8. Доведіть, що сума $108a + 3b$ ділиться на 6 при довільному натуральному a і парному b .
 9. Доведіть:
 - а) якщо n непарне число, то $n^2 - 1$ ділиться на 4;
 - б) $n^2 - 1$ ділиться на 8, якщо $n^2 - 1$ ділиться на 2;
 - в) $n(2n - 1)(2n + 1)$ кратне 3, якщо n – ціле число;
 - г) $n^3 - 4n$ ділиться на 48, якщо $n^3 - 4n$ ділиться на 2.



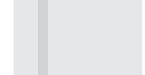
- 10.** Доведіть, що якщо ab ділиться на c і $a + b$ ділиться на c , то:
- $a^2 + b^2$ ділиться на c ;
 - $a^3 + b^3$ ділиться на c^2 .
- 11*.** Доведіть, що $a^4 + 4b^4$ ділиться на $a^2 + 2ab + 2b^2$.
- 12*.** Доведіть, що якщо $ab + cd$ ділиться на $a + c$, то і $ad + bc$ ділиться на $a + c$.
- 13.** Визначте, які з наступних тверджень є правильними (відповідь обґрунтуйте):
- якщо один доданок ділиться на 15, а другий ні, то їхня сума не ділиться на 15;
 - якщо кожний з двох доданків ділиться на 15, то їхня сума ділиться на 15;
 - якщо обидва доданки не діляться на 15, то і їхня сума не ділиться на 15;
 - якщо число ділиться на 15 і на 21, то воно ділиться і на $15 \cdot 21 = 315$.
- 14.** Чи ділиться $a^2 - c^2 + b(2a + b)$ на $a + b - c$?
- 15*.** Про три простих числа відомо, що одне з них дорівнює різниці кубів двох інших. Знайдіть ці числа.
- 16*.** Мавпи зібрали по однаковій кількості горіхів і понесли Мауглі. По дорозі кожна мавпа кинула в кожну по одному горіху, тому Мауглі отримав лише 33 горіхи. Скільки горіхів зібрала одна мавпа, якщо кожна з них принесла Мауглі більше ніж один горіх?
- 17.** Знайдіть найбільше число, на яке ділиться числа 576, 180 і 9060.
- 18.** Чи можна твердити, що найменше спільне кратне двох чисел ділиться на найбільший спільний дільник цих чисел?
- 19.** Чи може найбільший спільний дільник двох нерівних натуральних чисел бути більшим за їхню різницю?
- 20.** У скільки разів найменше спільне кратне двох чисел більше за їх найбільший спільний дільник, якщо частка від ділення більшого із чисел на менше дорівнює 4?
- 21.** Чи буде цілим числом частка від ділення НСК ($a; b; c$) на НСД ($a; b; c$)?
- 22.** Чи правильним є твердження: якщо НСД ($a; b$) = НСД ($b; c$) = $= d$, то і НСД ($a; c$) = d ?
- 23.** Різниця двох непарних чисел дорівнює 8. Знайдіть НСД цих чисел.
- 24.** Одне число в 10 разів більше за інше. У скільки разів НСК цих чисел перебільшує їхній НСД?
- 25.** Число x в 5 разів більше за y , а y менше від числа z в 3 рази. Знайдіть НСК і НСД чисел x, y, z .

- 26***. Знайдіть НСД усіх шестицифрових чисел, що складені з цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 (без повторення).
- 27.** Доведіть, що добуток п'яти послідовних натуральних чисел ділиться на: а) 30; б) 120.
- 28.** Доведіть, що сума двох послідовних непарних чисел завжди ділиться на 4.
- 29.** Доведіть, якщо сума чотирьох чисел є числом непарним, то їхній добуток – число парне.
- 30.** Доведіть, що число $mn(m+n)$, де m і n – цілі числа, є числом парним.
- 31***. Довільно взято два натуральних числа і складено їхню суму, різницю та добуток. Доведіть, що серед цих трьох чисел принаймні одне число кратне трьом.
- 32.** Доведіть, що сума квадратів двох будь-яких непарних чисел не ділиться на 4.
- 33***. Чи може сума чотирьох послідовних натуральних чисел бути точним квадратом?
- 34***. Число p – просте. Скільки існує натуральних чисел:
- менших від p і взаємно простих з ним;
 - менших від p^2 і взаємно простих з ним?
- 35.** Дано $56a = 65b$. Доведіть, що $a + b$ – складене число.
- 36***. Скільки всього дільників має число $3^6 \cdot 5^4$?
- 37***. Петренко жив у квадратній кімнаті зі стороною завдовжки ціле число метрів. Василенко має дві кімнати, загальна площа яких така сама, як у Петренка. Знайдіть площею їхніх квартир, якщо одна з кімнат Василенка та-кож квадратної форми зі стороною завдовжки у ціле число метрів, а площа другої кімнати дорівнює 7 m^2 .
- 38.** Доведіть, що для довільних натуральних чисел a, b, c правильно е співвідношення НСД $(a; b; c) : \text{НСК}(a; b; c) = abc : \text{НСД}(a; b; c)$.
- 39.** Знайдіть НСД чисел: а) $2n$ і $2n + 2$; б) $2n$ і $4n + 2$;
в) $3n$ і $6n + 3$; г) $30n + 25$ і $20n + 15$.
- 40.** Знайдіть два натуральних числа, різниця яких дорівнює 66, а НСК дорівнює 360.
- 41***. Якщо до числа 20 додати 16, то отримаємо 36 – повний квадрат. Якщо від числа 20 відняти 16, то отримаємо 4 – повний квадрат. Знайдіть усі цілі числа, які перетворюються на повний квадрат як при додаванні до них 16, так і при відніманні від них 16.
- 42***. Доведіть, що для всіх цілих чисел $n \geq 1$ число $(9^{n+1} - 9)$ ділиться на 8.

- 43.** Числа n і m не діляться на 3. Доведіть, що або сума, або різниця цих чисел кратна числу 3.
- 44*.** Сума двох непарних чисел дорівнює 16. Доведіть, що ці числа взаємно прості.
- 45*.** Різниця двох непарних чисел дорівнює 32. Доведіть, що ці числа взаємно прості.
- 46*.** Сума двох чисел дорівнює 27. Коли перший доданок збільшили в 5 разів, а другий – у 3 рази, то нова сума стала дорівнювати 111. Знайдіть ці числа.
- 47*.** Чи може різниця квадратів двох цілих чисел дорівнювати 6666?
- 48*.** Доведіть, що якщо для натуральних чисел a , b , c виконується співвідношення $a^2 + b^2 = c^2$ і число c ділиться на 3, то $a : 3$ і $b : 3$.
- 49*.** Доведіть, що якщо для натуральних чисел a , b , c виконується співвідношення $a^2 + b^2 = c^2$, то або $a : 3$, або $b : 3$.
- 50.** Визначте, чи може дріб $\frac{5x-2}{1-4x}$ бути скоротним, якщо x – ціле число.
- 51.** Знайдіть усі цілі значення a , при яких дріб $\frac{3a+2}{4-a}$ дорівнюватиме цілому числу.
- 52.** При яких цілих значеннях a дріб $\frac{4a-5}{2a-1}$ буде натуральним числом?
- 53.** При яких цілих значеннях n буде цілим значенням дробу:
 а) $\frac{n^2 - n + 3}{n + 1}$; б) $\frac{2n^2 - 3n + 2}{2n - 1}$?
- 54*.** Площі й периметри двох кімнат записали в квадратних метрах і метрах відповідно. Число, що є записом площі однієї з кімнат, на одиницю більше за число, що виражає периметр цієї кімнати. Для іншої кімнати – перше число на одиницю менше від другого. Знайдіть розміри кімнат, якщо їхні довжина та ширина – цілі числа (при запису в метрах).
- 55*.** При якому найменшому натуральному k будуть цілими числами дроби: а) $\frac{2^5}{k^2 - 1}$; б) $\frac{2^5 + 1}{k^2 - 1}$; в) $\frac{k^2 - 1}{2^5}$?
- 56*.** Дріб $\frac{m}{n}$ – нескоротний. Доведіть, що і дріб $\frac{m-n}{m+n}$ теж є нескоротним.



- 57*. Доведіть, що при довільному натуральному значенні n :
- а) $7^n - 1$ кратне числу 6; б) $15^n - 1$ кратне числу 7;
 - в) $3^{3n} - 1$ кратне числу 13; г) $2^{4n} - 1$ кратне числу 15.
58. Доведіть, що при парному значенні натурального числа n :
- а) $7^n - 5^n$ ділиться на 24; б) $5^n - 3^n$ ділиться на 16.
- 59*. Доведіть, що число $8^{2n} - 9^n$ ділиться на 11.
60. Число $a + \frac{1}{a}$ – ціле. Доведіть, що число:
- а) $a^2 + \frac{1}{a^2}$ – ціле; б*) $a^3 + \frac{1}{a^3}$ – ціле.
- 61*. Доведіть, що число $2011 \cdot 2013 \cdot 2015 \cdot 2017 + 16$ є квадратом натурального числа.
- 62*. Петрик написав на дошці 12 цілих чисел. З'ясувалося, що шість з них парні, а сім діляться на 3. Скільки чисел Петрика кратні числу 6?
- 63*. Вісім кущів малини розміщено рядком. Кількість ягід на довільних двох сусідніх кущах відрізняється на 1. Чи може загальна кількість ягід дорівнювати 2011?
- 64*. Цілі числа a , b , c задовольняють співвідношення $ab + bc + ca = 0$. Доведіть, що число abc можна представити як добуток квадрата цілого числа на куб цілого числа.
- 65*. На шахову дошку розлили фарбу. Чи може кількість зафарбованих клітинок бути на 17 менше від кількості клітинок, що залишилися чистими?
- 66*. Двоє по черзі ламають шоколадку, що складається з $7 \times 8 = 56$ частинок. За один хід можна зробити лише один розлом по прямій вздовж заглиблення на шоколаді. Програє той, хто не матиме ходу. Хто виграє і як?
- 67*. Маленька Ксюша порвала малюнок старшої сестрички. Кожен шматок вона рвала на дві частини. Коли спробували зібрати малюнок, знайшли 120 шматків. Чи всі шматки було знайдено?
- 68*. Чи можна скласти магічний квадрат із 36 перших простих чисел? (Магічний квадрат – це квадратна таблиця, у кожній клітинці якої записано числа так, що їхні суми в кожному рядку та в кожному стовпчику однакові.)
- 69*. Дано шість чисел: 1, 112, 33, 2009, 2010, 24444. Дозволено за один хід до довільних трьох з них додати по 1, 2 і 3. Чи можна зробити всі числа рівними?
- 70*. На чудо-дереві ростуть 2011 цукерок і 2010 шоколадок. Можна зривати з нього тільки по два «фрукти». Якщо





зірвати два одинакових «фрукти», на дереві з'являється цукерка, якщо два різних – шоколадка. Після прогулянки учнів навколо чудо-дерева на ньому залишився лише один «фрукт». Це була цукерка чи шоколадка?

71*. На столі 12 келихів: 11 стоять правильно, а один – догори дном. Дозволено перевернути два довільних келихи. Чи можна таким способом поставити всі келихи правильно?

72*. Двоє грають у гру. Перший називає довільне число від 1 до 5. Потім другий додає до цього числа довільне ціле число від 1 до 5. Після того перший до отриманої суми знову додає довільне число від 1 до 5 і т. д. Виграє той, хто першим отримає число 60. Хто виграє за правильної стратегії гри: той, хто починає, чи його супротивник? Якою повинна бути правильна стратегія?

§ 2. Запис числа. Ознаки подільності

Як відомо, у десятковій системі числення (кажуть у системі числення з основою 10) довільне натуральне число можна представити у вигляді

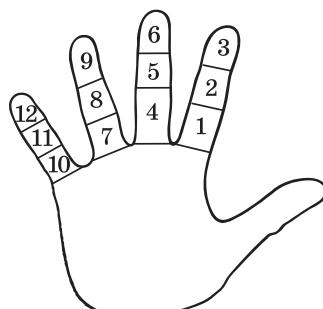
$$a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0 = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0. \quad (2.1)$$

Саме ця система є загальноприйнятою, оскільки десять пальців рук – найпростіший апарат для обчислень, який люди використовували, починаючи із сивої давнини.

ПОЗИЦІЙНІ І НЕПОЗИЦІЙНІ СИСТЕМИ ЧИСЛЕННЯ

Проте, окрім десяткової, існували й інші системи числення, у яких основа відрізнялася від 10. Так, достатньо широко застосовувалася *дванадцяткова система*. Її залишки ї досі використовуються в усному мовленні. Замість того щоб сказати «дванадцять», іноді можна почути «дюжина». Певні предмети (виделки, ложки, ножі, тарілки, носові хустинки тощо) часто рахують саме дюжинами, а не десятками.

Походження дванадцяткової системи також пов’язане з рахунком на пальцях, а саме – на фалангах (мал. 1). Чотири пальці руки (без



Мал. 1





великого) мають загалом 12 фаланг. Водячи великим пальцем по цих фалангах, здійснювали рахунок від 1 до 12. Потім приймали 12 за одиницю наступного розряду (*дюжину*) й рахували далі. Зауважимо, що одиницю третього розряду (*дюжину дюжин*) називали *гросс*, а дюжину гроссів – *маса*. Можливе останнє поняття є коренем походження таких виразів як «*маса справ*», «*маса людей*» тощо.

Існували й інші системи числення (з основами 2, 6, 60). У системі числення з основою m скорочений запис числа $(a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0)_m$ означає

$$(a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0)_m = a_n m^n + a_{n-1} m^{n-1} + \dots + a_1 m + a_0. \quad (2.2)$$

Цифрами в такій системі є числа 0, 1, 2, ..., $m - 2$, $m - 1$. Такі системи числення називають *позиційними*.

Непозиційні системи будуються за іншим принципом. Загально відомий приклад такої системи – римські цифри. У цій системі є набір певних символів, а саме: I – одиниця, V – п'ять, X – десять, L – п'ятдесят, C – сто і т. д. Кожне із чисел представляється як комбінація цих символів. Наприклад, число 88 у римській системі має вигляд LXXXVIII.

Щоб представити число, записане в одній позиційній системі числення, наприклад у десятковій, в іншій позиційній системі, треба знайти коефіцієнти a_0 , a_1 , ..., a_n у відповідному розкладі (2.2).

Приклад 1 Представте число $(3287)_{10}$ у сімковій системі числення.

Розв'язання

1) Поділимо дане число на 7 (у цілих числах). Маємо $3287 : 7 = 469$ (ост. 4).

Отже, у сімковій системі числення $a_0 = 4$.

2) Щоб визначити a_1 , поділимо 469 на 7:

$469 : 7 = 67$ (ост. 0), $a_1 = 0$.

3) $67 : 7 = 9$ (ост. 4), $a_2 = 4$.

4) $9 : 7 = 1$ (ост. 2), $a_3 = 2$, $a_4 = 1$.

5) $(3287)_{10} = 7^4 + 2 \cdot 7^3 + 4 \cdot 7^2 + 0 \cdot 7 + 4 = (12404)_7$.

Відповідь. $(12404)_7$.

Приклад 2 У якій системі числення твердження $3 \cdot 3 = 10$ буде правильним?





Розв'язання

Зрозуміло, що три рази повторене число буде 9 у будь-якій системі числення. Але в пропонованій умові число 9 є одиницею наступного розряду. Це буде правильним лише для системи числення з основою 9.

Відповідь. З основою 9.

Приклад 3 Якому числу в десятковій системі числення відповідає число 210 у системі числення з основою 3?

Розв'язання

У системі з основою 3 маємо: $210 = 3^2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 0$.

Отже, у десятковій системі числення це число дорівнює 21.

Відповідь. 21.

Приклад 4* Чи можна за допомогою шалькових терезів і важків у 1 грам, 3 грами, 9 грамів, 27 грамів ... (по одному кожній маси) зважити довільний вантаж з точністю до одного грама?

Розв'язання

Нехай предмет, масу якого треба визначити, має A грамів. Запишемо A у трійковій системі числення:

$$A = (a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0)_3 = a_n \cdot 3^n + a_{n-1} \cdot 3^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 3 + a_0,$$

де коефіцієнти $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ можуть набувати значень 0, 1 або 2.

Перепишемо останнє представлення числа A так, щоб коефіцієнти b_i у цьому запису мали вигляд 0, 1 і -1 . Здійснювати це будемо так. Представимо число A десяткової системи у трійковій, але, на відміну від звичайного переходу (див. приклад 1), кожного разу, коли отримуватимемо в остачі 2, частку збільшимо на 1, а в остачі писатимемо (-1) . Тоді

$$A = b_n m^n + b_{n-1} m^{n-1} + \dots + b_1 m + b_0.$$

Тепер вантаж A грамів покладемо на ліву шальку терезів, а важки будемо розміщувати так:

- 3^i грами ставимо на праву шальку, якщо $b_i = 1$;
- 3^i грами ставимо на ліву шальку, якщо $b_i = -1$.

Наприклад, якщо $b_0 = 1$, то вага 3^0 г = 1 г розміщується праворуч, а якщо $b_0 = -1$ – ліворуч (там, де і вантаж). Аналогічно розміщаються ваги 3^1 г = 3 г, 3^2 г = 9 г, ...

Легко зрозуміти, що таким чином ми зрівноважимо ваги і визначимо вагу даного предмета.

Відповідь. Можна.





ДВІЙКОВА СИСТЕМА ЧИСЛЕННЯ

Окремо зупинимося на *двійковій системі числення*. На надзвичайну простоту й своєрідність цієї системи першим (серед європейців) звернув увагу відомий філософ і математик Г.В. Лейбніц (1646–1716). Проте у Китаї ця система скопіш за все була відома значно раніше.

Двійкова система числення застосовується в різних галузях математики. Одним із прикладів старовинних технічних застосувань цієї системи є телеграф або радіотелеграф, а сучасних – обчислювальна техніка.

У двійковій системі маємо дві цифри 0 та 1. Число 2 як основа стає одиницею другого розряду, їй відповідає запис «10». Число $3 = 2 + 1$, містить одиницю другого розряду й одиницю першого розряду й записується як «11». Число $4 = 2^2$, тобто є одиницею третього розряду, тому записується як «100» і т. д.

Запис числа у двійковій системі більш громіздкий, ніж у десятковій, проте дії із числами в цій системі надзвичайно прості.

Розглянемо *додавання у двійковій системі*. Наприклад, додамо два числа 10 110 і 1101 (тобто 22 і 13). Запишемо ці числа одне під одним так, щоб відповідні розряди цих чисел розміщувалися один під одним (аналогічно до десяткової системи). Якщо у стовпчику маємо одну одиницю (тобто друга цифра нуль) – у результаті пишемо 1 (див. мал. 2), якщо дві одиниці – пишемо 0 і в наступний розряд переносимо 1. Тобто сумаю заданих чисел буде число 100 011.

$$\begin{array}{r} 10110 \\ + 1101 \\ \hline 100011 \end{array}$$

Мал. 2

Знаходити доповнення у двійковій системі теж значно простіше, ніж у десятковій. Нагадаємо, що в *десятковій системі доповненням* даного числа є різниця між найближчим степенем десяти і даним числом. Так, доповненням 7 буде 3, а доповнення числа 89 дорівнює 11.

Аналогічно *двійковим доповненням* є різниця між найближчим степенем двійки і даним числом.

Приклад 5 Знайдіть двійкове доповнення числа 11 010 111 000.

Розв'язання

Для того щоб записати шукане доповнення, залишаємо без змін останню праву одиницю та всі нулі, що йдуть за нею; у всіх інших розрядах одиницю замінююмо нулем, а нуль – одиницею.



Тоді маємо 00 101 001 000.

Зрозуміло, що перші нулі ліворуч можна опустити. Шука-
ним доповненням числа 11 010 111 000 буде число 101 001 000.
Відповідь. 101 001 000.

Якщо ми вміємо знаходити доповнення, то легко можемо
виконати й *віднімання у двійковій системі*.

Приклад 6 Знайдіть різницю 1 110 001 – 11 011.

Розв'язання

- 1) Знайдемо двійкове доповнення від'ємника. Маємо
 $00\ 101 = 101.$

- 2) Тепер замінюємо віднімання додаванням:

$$\begin{array}{r} 1\ 110\ 001 \\ + \quad \quad 101 \\ \hline 1\ 110\ 110 - 100\ 000 = 1\ 010\ 110. \end{array}$$

Відповідь. 1 010 110.

Зауважимо, що останній приклад у десятковій системі
має вигляд $113 - 27 = 86$, що значно коротше.

Розглянемо *множення у двійковій системі*. Таблиця множення у двійковій системі має вигляд:

$$0 \times 0 = 0; \quad 0 \times 1 = 0; \quad 1 \times 0 = 0; \quad 1 \times 1 = 1.$$

Запис дії множення аналогічний відповідному запису в де-
сятковій системі. Тобто записуємо одне число під одним так,
щоб відповідні розряди цих множників розміщувались один
над одним, і виконуємо пороряднє множення нижнього числа
на верхнє (при множенні на 1 число не змінюється, а при
множенні на 0 маємо 0). Потім виконуємо додавання чисел у
рорядних стовпчиках.

Приклад 7 Знайдіть добуток чисел 111 001 101 і 1 101 101.

Розв'язання

$$\begin{array}{r} 111\ 001\ 101 \\ \times \quad \quad \quad 1101\ 101 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 111\ 001\ 101 \\ + \quad \quad \quad 111\ 001\ 101 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 111\ 001\ 101 \\ \times \quad \quad \quad 111\ 001\ 101 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 111\ 001\ 101 \\ + \quad \quad \quad 111\ 001\ 101 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 111\ 001\ 101 \\ \times \quad \quad \quad 111\ 001\ 101 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 111\ 001\ 101 \\ + \quad \quad \quad 111\ 001\ 101 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 111\ 001\ 101 \\ \times \quad \quad \quad 111\ 001\ 101 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 111\ 001\ 101 \\ + \quad \quad \quad 111\ 001\ 101 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 111\ 001\ 101 \\ \times \quad \quad \quad 111\ 001\ 101 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 111\ 001\ 101 \\ + \quad \quad \quad 111\ 001\ 101 \\ \hline \end{array}$$

Відповідь. 1 100 010 001 001 001.

Відповідь. 1 100 010 001 001 001





Зауважимо, що останній приклад у десятковій системі має вигляд

$$\begin{array}{r} \times 461 \\ \times 109 \\ \hline 4149 \\ + 461 \\ \hline 50249. \end{array}$$

Дія множення, як і додавання та віднімання, у десятковій системі виконується значно коротше, хоча й вимагає певної кваліфікації. У школі потрібно дитину навчати не один рік, щоб осiąгнути виконання таких дій. Проте в двійковій системі числення відповідні дії виконуються автоматично.

Стосовно ділення, то ця арифметична дія є найскладнішою з усіх арифметичних дій (пригадайте себе в початковій школі). У середні віки ділення вважалося настільки складною математичною операцією, що людина, яка вміла це робити, отримувала вчений ступінь.

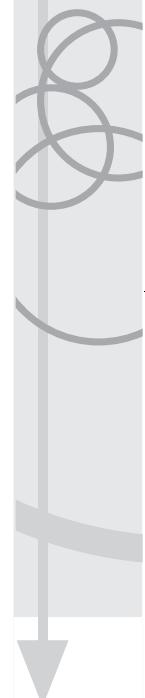
А от ділення в двійковій системі виконується автоматично! При діленні запис здійснюємо аналогічно до того, як ми звикли робити в десятковій системі. Проте на кожному кроці під діленим пишемо не добуток дільника на відповідну цифру, а двійкове доповнення цього добутку (нулі ліворуч можна не закреслювати). Розглянемо приклад.

Приклад 8 Поділіть 11 011 101 на 10 111.

Розв'язання

$$\begin{array}{r} 11\ 011\ 101 \quad | 10\ 111 \\ + 01\ 001 \qquad \qquad 1001 \\ \hline 100\ 100 \\ - 100\ 000 \\ \hline 100\ 101 \\ + 01\ 001 \\ \hline 101\ 110 \\ - 100\ 000 \\ \hline 1110. \end{array}$$

Відповідь. У частці 1001 і в остачі 1110.





Зауважимо, що останній приклад у десятковій системі має вигляд

$$\begin{array}{r} 221 \quad | \quad 23 \\ - 207 \quad \quad 9 \\ \hline 14. \end{array}$$

Незважаючи на громіздкий запис арифметичних дій у двійковій системі, стає зрозумілим, чому саме на двійковій системі числення базується робота обчислювальної техніки.

*ГРА В ТРИ КУПКИ КАМІНЦІВ

Ще в стародавньому Китаї була відома гра під назвою «Нім», або «Гра у три купки камінців». У сучасних умовах таку задачу формулюють, скориставшися сірниками, цукерками або іншими предметами. Задача полягає в тому, щоб з'ясувати результат гри при оптимальній тактиці гравців і вказати, якою саме повинна бути така тактика.

Приклад 9 Є три купки камінців. Двоє гравців по черзі беруть камінці із цих купок. Причому за один хід можна взяти довільну (не нульову) кількість камінців з будь-якої купки (тільки з однієї). Виграє той гравець, хто візьме останній камінець.

Розв'язання

Нехай задані купки містять відповідно a , b і c камінців. Запишемо числа a , b і c у двійковій системі числення:

$$\begin{aligned} a &= a_n \cdot 2^n + a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 2 + a_0, \\ b &= b_n \cdot 2^n + b_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \dots + b_1 \cdot 2 + b_0, \\ c &= c_n \cdot 2^n + c_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \dots + c_1 \cdot 2 + c_0. \end{aligned}$$

Вважатимемо, що в кожному із цих записів однакова кількість розрядів. Тобто допишемо попереду відповідну кількість нулів у тих числах, що мають меншу кількість знаків, ніж інше число.

Отже, кожна із цифр a_n , a_{n-1} , ..., a_1 , a_0 , b_n , b_{n-1} , ..., b_1 , b_0 , c_n , c_{n-1} , ..., c_1 , c_0 може набувати значення 0 або 1. До того хоча б одна із трьох цифр a_n , b_n , c_n відмінна від нуля.

Гравець за один хід може замінити одне із чисел a , b , c на менше. Це означає, що в одному з наведених раніше розкладів чисел a , b , c змінюються коефіцієнти (хоча б один з них).

Розглянемо суми:

$$a_n + b_n + c_n, a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1}, \dots, a_0 + b_0 + c_0. \quad (*)$$





Кожна із цих сум може дорівнювати 0, 1, 2 або 3. Якщо хоча б одна з таких сум непарна (тобто дорівнює 1 або 3), то перший гравець може забезпечити собі виграні.

Справді, нехай $a_k + b_k + c_k$ перша із цих сум (якщо розглядати їх зліва направо), яка є непарною, тобто хоча б один з коефіцієнтів a_k , b_k , c_k дорівнює 1. Для визначеності вважатимемо, що $a_k = 1$, тоді гравець може взяти з першої купки таку кількість камінців, щоб коефіцієнти a_n , a_{n-1} , ..., a_{k+1} не змінилися, a_k стало нулем, а коефіцієнти a_{k-1} , ..., a_1 , a_0 змінили або не змінили своє значення відповідно до бажання гравця. Тоді гравець може взяти з першої купки таку кількість камінців, щоб всі суми $a_{k-1} + b_{k-1} + c_{k-1}$, ..., $a_0 + b_0 + c_0$ стали парними.

Отже, гравець, що розпочинає гру, може зробити так, щоб після його ходу всі суми (*) стали парними.

Другий гравець неминуче змінить парність хоча б однієї із цих сум. Тобто після його ходу матимемо позицію, з якої починалася гра, коли хоча б одна із сум (*) буде непарною.

Перший гравець знову перетворює всі суми (*) на парні і т. д.

Після кожного кроку кількість камінців зменшується, і настане момент, коли всі суми (*) перетворяться на нулі. Це відбудеться після ходу першого гравця (бо нуль – число парне).

Якщо числа a , b , c такі, що всі суми (*) парні, то тоді другий гравець може застосувати вказану раніше тактику й виграти.

ДЕСЯТКОВА СИСТЕМА ЧИСЛЕННЯ ТА ОЗНАКИ ПОДІЛЬНОСТІ

Розглянемо приклади задач, розв'язування яких ґрунтуються на десятковій формі запису числа.

Приклад 10 Доведіть, що число $\overline{ab} - \overline{ba}$ кратне числу 9.

Розв'язання

Дане число дорівнює $10a + b - (10b + a) = 9a - 9b$, тобто ділиться на 9.

Щ. в. д.

Приклад 11 Доведіть, що трицифрове число, записане однаковими цифрами, ділиться на 37.



Розв'язання

Запишемо задане число у вигляді $\overline{aaa} = 100a + 10a + a = 111a = 37 \cdot 3a : 37$.

Щ. в. д.

Приклад 12 Сума цифр трицифрового числа дорівнює 12. Сума цифр його сотень і десятків кратна 9. Якщо від шуканого числа відняти 99, то отримаємо число, записане тими самими цифрами, але у зворотному порядку. Знайдіть це число.

Розв'язання

Запишемо шукане число \overline{abc} у вигляді $100a + 10b + c$.

За умовою:

$$1) a + b + c = 12;$$

$$2) (a + b) : 9;$$

$$3) 100a + 10b + c - 99 = 100c + 10b + a.$$

3 (1) і (2) маємо: $a + b = 12 - c = 9n$, де $n \in N$; $c = 12 - 9n = 3$ (оскільки c – цифра).

3 (3) маємо: $99a - 99c = 99$, $a = 1 + c = 4$.

Тоді $b = 12 - c - a = 5$.

Відповідь. 453.

Приклад 13 Доведіть, що різниця $10^{25} - 7$ ділиться на 3.

Розв'язання

Запишемо дану різницю у вигляді

$$10^{25} - 7 = 10^{25} - 1 - 6 = \underbrace{\overline{99\dots9}}_{25} - 6.$$

І перше, і друге число останнього виразу діляться на 3, отже, і їхня різниця теж кратна числу 3.

Щ. в. д.

Приклад 14 Знайдіть останню цифру квадрата числа, якщо передостання цифра цього квадрата – непарне число, але не одиниця.

Розв'язання

Запишемо шукане число c у вигляді $c = 10a + b$. За умовою

$$c^2 = (10a + b)^2 = 100a^2 + 20ab + b^2.$$

Передостання цифра числа c^2 може бути непарною лише тоді, коли кількість десятків у числі b^2 непарна. Можливі лише два варіанти: $b^2 = 16$ або $b^2 = 36$. Перший варіант не





задовільняє умову задачі (передостання цифра квадрата – не одиниця).

Відповідь. 6.

Приклад 15* Знайдіть усі двоцифрові числа a , квадрат суми цифр яких дорівнює сумі цифр числа a^2 .

Розв'язання

Нехай шукане число $a = \overline{xy}$.

1) Зазначимо, що $a^2 < 99^2 = 9801 < 9999$. Тоді

$$(x + y)^2 < 4 \cdot 9 = 36 \text{ і } x + y < 6.$$

2) Маємо, що $x + y < 6$, тобто $x + y \leqslant 5$. Розглянемо всі можливі випадки чисел \overline{xy} : 10, 11, 12, 13, 14, 20, 21, 22, 23, 30, 31, 32, 40, 41, 50. З них умову задачі задовільняють: 10, 11, 12, 13, 20, 21, 22, 30, 31.

Відповідь. 10, 11, 12, 13, 20, 21, 22, 30, 31.

Приклад 16* Знайдіть усі натуральні числа, які збільшуються в 9 разів, якщо між цифрою одиниць і цифрою десятків вставити цифру 0.

Розв'язання

Запишемо шукане число у вигляді

$$\overline{a_n a_{n-1} \dots a_0} = 10a + b,$$

де введемо позначення: $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1} = a$, $a_0 = b$.

Тоді $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 0 a_0} = 100a + b$. За умовою маємо

$$100a + b = 9(10a + b), \quad 5a = 4b.$$

Тоді $b : 5$ і, враховуючи, що b – цифра, маємо $b \in \{0; 5\}$.

У випадку $b = 0$ отримаємо $a = 0$, тобто $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0} = 0 \notin N$ – розв'язків немає.

У випадку $b = 5$ отримаємо $a = 4$, тобто $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0} = 10 \cdot 4 + 5 = 45 \in N$.

Відповідь. 45.

Нагадаємо **ознаки подільності числа**, що випливають з десяткової форми запису числа (2.1).

Степені 10^k ($k \geqslant 1$) діляться на 2, 5, 10. Тому маємо таке.

- Число a ділиться на 2, якщо його остання цифра парна.
- Число a ділиться на 10, якщо його остання цифра 0.
- Число a ділиться на 5, якщо його остання цифра 0 або 5.



При $k \geq 2$ степені 10^k діляться на 4. Тому маємо таке.

- **Ознакою подільності на 4 є ділення без остачі на 4 двоцифрового числа $\overline{a_1a_0}$.**
- **Число a ділиться на 8, якщо трицифрове число $\overline{a_2a_1a_0}$ ділиться на 8.**

ОЗНАКИ ПОДІЛЬНОСТІ НА 3 ТА НА 9

Довільне натуральне число $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_0}$ можна записати у вигляді:

$$a_n(10^n - 1) + a_{n-1}(10^{n-1} - 1) + \dots + a_1(10 - 1) + \\ + (a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0).$$

Очевидно, що $10^k - 1 = \underbrace{99\dots9}_k$ ділиться і на 3, і на 9.

Тоді, якщо число $(a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0)$ ділиться на 3 (або на 9), то і число $a_n(10^n - 1) + a_{n-1}(10^{n-1} - 1) + \dots + a_1(10 - 1) + (a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0)$ ділиться на 3 (або на 9). Маємо шукані ознаки подільності.

- Число ділиться на 3, якщо сума його цифр ділиться на 3.
- Число ділиться на 9, якщо сума його цифр ділиться на 9.

Зазначимо, що правильними будуть і обернені ознакам подільності твердження. Це легко довести, спираючися на десяткову форму запису числа (2.1).

Приклад 17 У десятковому запису числа 300 одиниць, кілька нулів, а інших цифр немає. Чи може це число бути повним квадратом?

Розв'язання

Сума цифр даного числа дорівнює 300 і ділиться на 3, але не ділиться на 9. Отже, це число не може бути повним квадратом.

Відповідь. Ні.

Приклад 18 До числа 10 справа і зліва дописали по одній цифрі так, щоб отримати число, кратне числу 72. Знайдіть це число.

Розв'язання

Отримане число кратне числу 72, отже, ділиться на 8 і на 9.

З кратності 8 маємо, що останньою його цифрою може бути лише 4.

З кратності числу 9 маємо, що першою його цифрою може бути лише 4.

Відповідь. 4104.



Приклад 19 Остання цифра квадрата натурального числа 6. Доведіть, що його передостання цифра непарна.

Розв'язання

Задане число $a^2 = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1} 6$ – парне, тоді число a є теж парним, тобто $a^2 \vdots 4$. Тоді (за ознакою подільності на 4) маємо, що $a_1 6 \vdots 4$, тобто двоцифрове число $a_1 6$ має вигляд: 16, або 36, або 56, або 76, або 96. Звідси $a_1 \in \{1; 3; 5; 7; 9\}$ і є числом непарним.

І. в. д.

ЧИСЛО ШАХЕРЕЗАДИ І ОЗНАКИ ПОДІЛЬНОСТІ НА 7, 11 І 13

Перейдемо до ознак подільності на 7, 11 і 13. У цьому нам допоможе число 1001, яке ще називають *числом Шахерезади*.

Число Шахерезади має кілька цікавих властивостей.

- 1) Це найменше із чотирицифрових чисел, яке можна представити у вигляді суми кубів двох натуральних чисел: $1001 = 10^3 + 1^3$.
- 2) Число 1001 складається із 77 «чортових» дюжин: $1001 = 77 \cdot 13$.
- 3) Число 1001 складається із 143 «магічних» чисел 7: $1001 = 143 \cdot 7$.
- 4) Число 1001 складається з 91 одинадцяток: $1001 = 91 \cdot 11$.
- 5) $1001 = 52 \cdot 7 + 52 \cdot 7 + 26 \cdot 7 + 13 \cdot 7$. Отже, якщо вважати, що рік дорівнює 52 тижням, то 1001 ніч складається з $1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ року. А сума $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + 1/2^n$, який часто трапляється у математиці й якому в старовину теж приписували магічні властивості.

Властивості числа 1001 перетинаються з магією та математикою. Зокрема, на його властивостях ґрунтуються доведення ознак подільності на 7, 11 і 13.

Розглянемо число $\overline{a_n \dots a_1 a_0}$. Його можна представити у вигляді

$$\overline{a_n \dots a_3} \cdot 1000 + \overline{a_2 a_1 a_0} = \overline{a_n \dots a_3} \cdot 1001 + (\overline{a_2 a_1 a_0} - \overline{a_n \dots a_3}).$$

Число 1001 ділиться на 7, на 11 і на 13. Тоді число $\overline{a_n \dots a_1 a_0}$ ділиться на 7 (11 або 13), якщо на 7 (11 або 13) ділиться різниця $(\overline{a_2 a_1 a_0} - \overline{a_n \dots a_3})$.



Маємо ознаку подільності на 7, 11, 13.

- Число ділиться на 7 (11, 13), якщо на 7 (11, 13) ділиться різниця даного числа без останніх трьох розрядів і числа, утвореного останніми трьома цифрами.

Приклад 20 Чи ділиться число 946 988 875: а) на 7; б) на 11?

Розв'язання

$$\begin{aligned}1) \quad & 946\ 988 - 875 = 946\ 113; \\2) \quad & 946 - 113 = 833; \\3) \quad & 833 : 7 = 119, \quad 833 : 11 = 75 + 8.\end{aligned}$$

За ознаками подільності на 7 і 11 маємо, що дане число кратне числу 7, але не ділиться на 11.

Відповідь. а) Так; б) ні.

Розглянемо іншу ознаку подільності на 11, яка була відома ще в XI ст. арабському математику аль-Кархі, а пізніше вперше сформульована у відомому нам вигляді французьким математиком Ж.Л. Лагранжем (1736–1813).

- Для того щоб число ділилося на 11, необхідно й достатньо, щоб різниця між сумою його цифр непарних розрядів (якщо рахувати справа наліво) і сумою цифр парних розрядів ділилася на 11.

Доведемо наведену ознаку для чотирицифрового числа $a_3a_2a_1a_0$. Запишемо його у вигляді

$$\begin{aligned}a_3 \cdot 1001 - a_3 + a_2 \cdot 99 + a_2 + 11a_1 - a_1 + a_0 = \\= a_3 \cdot 1001 + a_2 \cdot 99 + 11a_1 - a_3 + a_2 - a_1 + a_0.\end{aligned}$$

В останньому виразі перші три доданки кратні числу 11, тоді дане число ділиться на 11, якщо різниця $(a_2 + a_0) - (a_3 + a_1)$ кратна числу 11.

Зрозуміло, що аналогічне доведення можна провести для довільного n -цифрового числа, хоча його запис буде більш громіздким. У загальному вигляді цю ознаку ми доведемо лаконічно й прозоро пізніше (у § 8), спираючися на властивості остач.

Приклад 21 Чи ділиться 62 975 на 11?

Розв'язання

$$(5 + 9 + 6) - (7 + 2) = 19 - 9 = 11 : 11.$$

Тоді задане число ділиться на 11.

Відповідь. Так.





Приклад 22* Чи можна всі двоцифрові числа від 32 до 86 включно виписати в деякому порядку одне за одним так, щоб одержати запис простого числа?

Розв'язання

У якому б порядку ми не записували задані числа, різниця двох сум цифр, що стоятимуть на парних і на непарних місцях, є різницею сум перших і других цифр двоцифрових чисел 32, ..., 86. Отже, вона дорівнює $300 - 245 = 55$, ділиться на 11, тоді й утворене відповідно до умови число також буде кратним числу 11, тобто непростим.

Відповідь. Ні.

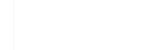
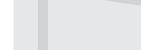
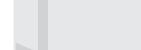
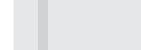
ЗАВДАННЯ 2

1. У якій системі числення твердження $2 \cdot 2 = 10$ буде правильної?
2. Знайдіть запис числа в системі числення з основою 7, якщо в десятковій системі це число має вигляд:
а) 100; б) 500; в) 343; г) 147; д) 2548.
3. Запишіть у десятковій системі числення число:
а) $(1\ 100\ 100)_2$; б) $(126)_8$; в) $(12\ 404)_7$.
4. Запишіть таблицю множення для шестиричної системи числення.
5. Виконайте дії (в указаних системах числення):
а) $(23\ 651)_8 + (17\ 043)_8$; б) $(423)_6 + (1341)_6 + (521)_6$;
в) $(352)_6 \cdot (245)_6$; г*) $(120\ 101)_3 : (102)_3$.
6. На дошці маємо напівстертий запис:

$$\begin{array}{r} 23*5* \\ + 1*642 \\ \hline 42423 \end{array}$$

З'ясуйте, в якій системі числення здійснювали додавання.

- 7*. «У тебе помилка», – сказала Ганна брату Миколі, дивлячись на запис у його зошиті: $13^2 = 171$. «Hi, – відповів Микола, – мені набридла десяткова система числення і я тепер рахую в системі числення з іншою основою». Визначте основу числення Миколи за наведеним прикладом.
- 8*. Один шкільний вчитель на запитання про кількість учнів у класі відповів так: «У мене в класі 100 дітей, з них 24 хлопці й 32 дівчини». Яку систему числення мав на увазі вчитель?





9. Сума цифр двоцифрового числа дорівнює 10, а різниця цього числа і числа, записаного тими самими цифрами в зворотному порядку, дорівнює 54. Знайдіть це число.
10. Друге двоцифрове число утворюється з першого перестановкою цифр. Різниця вказаних двоцифрових чисел дорівнює сумі цифр кожного з них. Знайдіть ці числа.
11. Перші три цифри семицифрового числа однакові, а інші чотири теж рівні між собою. Сума всіх цифр числа дорівнює числу, перша цифра якого збігається з першою цифрою заданого числа, а друга – з останньою. Знайдіть це число.
12. Сума цифр двоцифрового числа 16. Якщо в цьому числі переставити цифри, то воно збільшиться на 18. Знайдіть це число.
13. Знайдіть двоцифрове число, у якого цифра одиниць на 2 більша за цифру десятків, а добуток числа на суму його цифр дорівнює 144.
14. Сума цифр двоцифрового числа в 6 разів менша від цього числа. Добуток цього числа на число, записане тими самими цифрами в зворотному порядку, дорівнює 2430. Знайдіть це число.
15. Сума кубів цифр двоцифрового числа дорівнює 243, а добуток суми його цифр на добуток цифр цього числа дорівнює 162. Знайдіть це число.
16. Трицифрове число починається із цифри 7. Якщо цю цифру переставити в кінець числа, то отримане число буде на 117 менше від попереднього. Знайдіть задане число.
- 17*. Сума цифр двоцифрового числа 14. Якщо до цього числа додати 46, то вийде число, добуток цифр якого дорівнює 6. Знайдіть дане число.
- 18*. Десятковий запис добутку двох двоцифрових чисел складається винятково із четвірок. Знайдіть дані двоцифрові числа.
- 19*. Розшифруйте запис $a \cdot c \cdot \overline{ac} = \overline{ccc}$.
- 20*. Знайдіть усі числа, що в 3 рази перебільшують суму своїх цифр.
21. Доведіть, що трицифрове число, записане однаковими цифрами, ділиться на 3.
22. Доведіть, що різниця двох десяткових чисел, запис кожного з яких містить усі десять цифр, ділиться на 9.
23. Позначимо через A добуток двох довільних двоцифрових чисел, а через B – добуток тих самих чисел, але записаних у зворотному порядку. Доведіть, що число $A - B$ ділиться на 99.



- 24***. Чи може число $5^n - 1$ бути дільником числа $5^k + 1$, де n і k – натуральні числа?
- 25.** Яку цифру треба поставити замість c у число $\overline{28c}$, щоб отримане число було кратне числу:
а) 2; б) 3; в) 4; г) 5; д) 6; е) 9; е) 10?
- 26.** Доведіть правильність тверджень:
а) $(\overline{abc} - \overline{cba}) : 99$; б) $(\overline{ab} + \overline{ba}) : 11$; в) $(\overline{abcd} + \overline{dcba}) : 11$.
- 27.** Яку цифру треба записати замість a , щоб число $\overline{5431a}$ ділилося на 9?
- 28.** Доведіть: а) різниця $10^{101} - 10$ ділиться на 9;
б) сума $10^{13} + 5$ ділиться на 3.
- 29.** Доведіть, що не існує двоцифрового числа, що дорівнює добутку його цифр.
- 30.** Чи існує число, десятковий запис якого містить шість одиниць й сім нулів і є квадратом цілого числа?
- 31.** Чи може число, у десятковому записі якого використано 100 одиниць та 100 двійок, а решта цифр – нулі, бути точним квадратом?
- 32***. Чи може число, що дорівнює певному степеню двійки, мати у запису однакову кількість нулів, одиниць, двійок, ..., дев'яток?
- 33***. Розшифруйте запис:
а) $(\overline{ac})^2 = \overline{acc}$; б) $\overline{aa} + b = \overline{bcc}$; в*) $\overline{ab} - \overline{ba} = a$.
- 34.** Доведіть, що сума двох будь-яких послідовних парних чисел не ділиться на 4.
- 35***. Чи може квадрат парного числа бути п'ятицифровим числом, що складається із цифр 1, 4, 5, 9, 9?
- 36***. Чи існує таке число, помноживши яке на 6, отримаємо в добутку число, що складається з тих самих цифр, але написаних у зворотному порядку?
- 37***. Знайдіть усі числа, які в 13 разів більші за суму своїх цифр.
- 38***. Знайдіть усі двоцифрові числа, які діляться на кожну з цифр у їх запису.
- 39***. Сума цифри десятків і цифри одиниць двоцифрового числа, додана до їх різниці, дорівнює 10. Якщо між цими цифрами вставити 9, то число збільшиться в 11 разів. Знайдіть дане число.
- 40***. Доведіть, що для довільного $d \in N$ існує $n \in N$ таке, що $n : d$ і у десятковому запису числа n можна викреслити деяку ненульову цифру так, що отримане число теж буде ділитися на d .



- 41***. Доведіть, що десятковий запис числа 1999^6 має три одинакові цифри.
- 42***. Число 6116 має таку цікаву властивість: яку пару цифр не обрали б, остання цифра їхньої суми дорівнює останній цифрі суми двох інших цифр даного числа. Скільки ще існує чотирицифрових чисел з такою властивістю?
- 43***. Одне чотирицифрове число складено з послідовних цифр, розміщених у порядку зростання. Друге чотирицифрове число складено з тих самих цифр, але в порядку їх спадання. Третє чотирицифрове число також складено з тих самих чотирьох цифр. Знайдіть ці три числа, якщо їх сума дорівнює 12 300.
- 44***. Знайдіть найменше число, сума цифр якого ділиться на 17 і сума цифр наступного за ним числа також ділиться на 17.
- 45.** Візьміть шестицифрове число, яке ділиться на одне із чисел 7, 11, 13, 37. Переставте першу цифру в кінець числа. Переїрте, чи буде мати утворене число той самий дільник. Чому?
- 46.** Розв'яжіть попередню задачу у випадку п'ятицифрового числа.
- 47.** Чи ділиться на 11 число, утворене з даного n -цифрового числа, коли до нього (з правого боку) дописали задане число у зворотному порядку?
- 48.** Чи ділиться на 7 число: а) 284 258; б) 2 345 678 910?
- 49.** Чи ділиться на 13 число: а) 284 258; б) 2 345 678 910?
- 50.** Чи ділиться на 11 число: а) 3025; б) 1 000 080 009; в) 37 502 182; г) 6886; д) 2 185 335 812?
- 51***. У запису числа, що кратне числу 9, є 2012 цифр. Нехай a – сума цифр цього числа, b – сума цифр числа a , c – сума цифр числа b . Знайдіть число c .
- 52***. Доведіть, що число ділиться на 13 тоді й тільки тоді, якщо сума цифр числа, утвореного з даного заміною його останньої цифри записом добутку цієї цифри на 4, ділиться на 13.
- 53***. У ряд записано 12 зірочок. Двоє по черзі замінюють зірочки цифрами. Доведіть, що другий завжди може зробити так, щоб одержане 12-цифрове число ділилося на 77.
- 54***. Чи існує трицифрове число, кратне числу 11, в якого перша цифра більша за другу, а друга більша за третю?
- 55***. Усі двоцифрові числа, що не закінчуються нулем, записали одне за одним так, що кожне наступне починається з тієї самої цифри, якою закінчується попереднє. З усіх утворених за таким правилом багатоцифрових чисел обирають найбільше та найменше. Знайдіть їх суму.

§ 3. Арифметика цифр і степінь числа

Задачі, які містять степінь числа, легко розв'язуються, якщо з'ясувати, якою цифрою закінчується степінь цього числа.

Зауважимо, що остання цифра степеня числа залежить лише від цифри, якою закінчується задане число.

Проаналізуємо таблицю, у якій будемо записувати останню цифру степенів натуральних чисел.

Степінь числа \ Остання цифра	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	4	8	6	2	4	8	6	2	4	8	6	2
3	3	9	7	1	3	9	7	1	3	9	7	1	3
4	4	6	4	6	4	6	4	6	4	6	4	6	4
5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	9	3	1	7	9	3	1	7	9	3	1	7
8	8	4	2	6	8	4	2	6	8	4	2	6	8
9	9	1	9	1	9	1	9	1	9	1	9	1	9

Очевидна **періодичність**, з якою повторюється остання цифра числа при його піднесененні до степеня. Для цифр 9 і 4 – це 2; для цифр 2, 3, 7 і 8 – це 4; для цифр 0, 1, 5, 6 остання цифра при піднесененні до степеня не змінюється.

Узагальнимо сказане.

Завжди однаковою цифрою закінчуються степені натурального числа n^k і n^{k+4m} , $\{k, m\} \subset N$.

Приклад 1 Доведіть, що число $37^8 + 9$ ділиться на 10.

Розв'язання

Число 37^8 закінчується такою самою цифрою, що і число $37^{8-4} = 37^4$, тобто 1. Тоді число $37^8 + 9$ закінчується 0 і ділиться на 10. *Щ. в. д.*

Приклад 2 Доведіть, що число $49^{100} - 14^{50}$ ділиться на 5.

Розв'язання

Число 49^{100} закінчується такою самою цифрою, що і число $49^{100-4 \cdot 24} = 49^4$, тобто 1. Число 14^{50} закінчується такою са-





мою цифрою, що і число $14^{50-4 \cdot 12} = 14^2$, тобто 6. Тоді число $49^{100} - 14^{50}$ закінчується цифрою 5 і ділиться на 5. Іл. в. д.

Приклад 3 Якою цифрою закінчується число $9^{n-1} + 4^n$?

Розв'язання

1) Якщо число n – парне, то: 4^n має за останню цифру 6 (див. табл.), число $(n - 1)$ – непарне і 9^{n-1} має за останню цифру 9 (див. табл.). Тоді останньою цифрою числа $9^{n-1} + 4^n$ буде 5.

2) Якщо число n – непарне, то: 4^n має за останню цифру 4, число $(n - 1)$ – парне і 9^{n-1} має за останню цифру 1. Тоді останньою цифрою числа $9^{n-1} + 4^n$ буде 5.

Відповідь. 5.

Зверніть увагу на те, що

- квадрат цілого числа не може мати за останню цифру 3 або 7;
- четвертий степінь числа може закінчуватися тільки цифрами 1, або 5, або 6.

Приклад 4 Чи існує таке натуральне n , щоб число $9^{2n+1} + 4$ було повним квадратом цілого числа?

Розв'язання

Число $9^{2n+1} = 9 \cdot 3^{4n}$ закінчується цифрою 9. Тоді задане число закінчується цифрою 3 і не може бути квадратом цілого числа.

Відповідь. Ні.

Приклад 5* Скільки серед перших 10 000 натуральних чисел таких, що закінчуються одиницею і можуть бути представлені у вигляді $8^m + 5^n$?

Розв'язання

1) Зауважимо, що $n = 0$ або $m = 0$ не задовольняють умову задачі, оскільки 8^m і 5^n не можуть мати за останню цифру 0.

2) Число 5^n закінчується цифрою 5 при довільному натуральному n . Тоді число 8^m повинно закінчуватися цифрою 6, тобто m кратне числу 4 (див. табл.).

3) При найменшому значенні $n = 1$ маємо $8^m < 10\ 000 - 5 = 9995$. Тоді найбільше і єдине значення $m = 4$ (оскільки $8^4 = 4096$, а $8^5 = 32\ 768$).

4) Якщо $m = 4$, то $5^n < 10\ 000 - 4096 = 5904$, тоді $n \leqslant 5$ (оскільки $5^5 = 3125$, а $5^6 = 15\ 625$). Маємо всього $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$ чисел, що задовольняють умову задачі.

Відповідь. 15.



ЗАВДАННЯ 3

1. Чи може четвертий степінь цілого числа закінчуватися цифрою 4?
2. Якою цифрою закінчується число: а) 9^{2011} ; б) 9^{2012} ?
3. Якою цифрою закінчується число: а) 2^6 ; б) 2^{18} ; в) 2^{50} ?
4. Знайдіть останню цифру числа: а) 7^{77} ; б) 7^{777} ; в) 777^{77} ; г) 7^{2012} ; д*) $777^{2012^{77}}$.
5. Знайдіть останню цифру числа:
а) 3^{2013} ; б) $3^{6^{2011}}$; в*) $3^{2012^{2011}}$.
6. Якою цифрою закінчується сума:
а) $11^6 + 14^6 + 16^6$; б) $12^{35} + 25^{24} + 136^{136}$?
7. Доведіть без обчислень, що рівність $\sqrt[4]{234 \cdot 254} = 22$ є неправильною.
8. Доведіть, що число $64^{64} - 1$ ділиться на 5.
9. Сума двох непарних чисел ділиться на 5. Якою цифрою закінчується сума кубів цих чисел?
10. Доведіть, що на 10 ділиться число:
а) $m^{2006} - m^{1806}$, $m \in N$;
б) $k^{n+20} - k^{n+8}$, $\{k, n\} \subset N$;
в) $m^{17} - m^{13} + m^9 - m^5$, $m \in N$;
г) $99^{2n+1} + 43^{4n}$, $n \in N$;
д) $57^{145} - 47^{105} + 99^{65} - 39^{45}$.
11. Доведіть, що $9^{n+1} + 4^n$ ділиться на 5.
12. Якою цифрою закінчується число:
а) $6^n + 9^{2n}$; б) $4^{4n} - 9^{2n+1}$; в*) $6^{n+6} + 4^n$?
13. Визначте останню цифру числа при парному значенні натурального числа n : а) $9^n - 5^n$; б) $14^n - 5^n$.
- 14*. Чи ділиться сума $21^{39} + 39^{21}$ на 45?
- 15*. Знайдіть усі значення натурального числа n , при яких:
а) вираз $1008^{8n} + 1007^{2n-1}$ перетворюється на четвертий степінь цілого числа; б) вираз $1008^{2n} + 1007^{2n-16}$ перетворюється на квадрат цілого числа.
- 16*. Деяке ціле число A піднесли до куба. Доведіть, що хоча б одне із чисел $A^3 - A$ або $A^3 + A$ кратне числу 10.
- 17*. Доведіть, що при довільному натуральному n число $(n+1)^{2013} + n^{2013} + (n-1)^{2013} - 3n$ ділиться на 10.
- 18*. Доведіть, що число $11^{10} - 1$ ділиться на 100.
- 19*. Чи може число $a^2 + b^2 + c^2$ ділитися на 5, якщо жодне із чисел a, b, c не кратне числу 5?
- 20*. Відомо, що $\sqrt[3]{***9}$ – ціле число. Знайдіть його.
- 21*. Чи може число, що є певним степенем двійки, містити у своєму запису порівну нулів, одиниць, двійок, ..., дев'яток?



§ 4. Діофантові рівняння

Розв'язування рівнянь на множині цілих чисел (у яких коефіцієнти й невідомі змінні можуть приймати тільки цілі значення) найчастіше спирається на теореми, наведені у передніх параграфах.

Зауважимо, що алгебраїчні рівняння із цілими коефіцієнтами, які містять не менше двох змінних, що можуть набувати тільки цілих значень, називають *діофантовими рівняннями*. Такі рівняння зазвичай мають багато розв'язків, тому їх ще називають *невизначеними рівняннями*.

Указані рівняння названо на честь давньогрецького математика *Діофанта* (II – III ст.). Його книга «Арифметика» збереглася до наших часів. У цій книзі, яку вивчало багато поколінь математиків, Діофант вводить позначення невідомих величин літерами, визначає дії над степенями (до шостого), розглядає теорію невизначених рівнянь і систем таких рівнянь.

Дослідження невизначених рівнянь сьогодні називають *невизначенним аналізом*.

Значно пізніше за Діофанта почали проводити дослідження невизначених рівнянь індуси. Принаймні в XII ст. індійський математик *Бхаскара* розробив методику ціличислового розв'язування невизначених рівнянь першого степеня. До задач невизначеного аналізу індусів привели питання практичного життя. Так, при розв'язуванні задач, пов'язаних із календарем, їм часто доводилося шукати певні інтервали часу, що складалися із цілої кількості років або діб.

ЛІНІЙНІ ДІОФАНТОВІ РІВНЯННЯ

Розглянемо лінійні діофантові рівняння, тобто рівняння виду

$$ax + by = c, \quad (1)$$

де a, b, c – задані цілі числа ($a \neq 0$ і $b \neq 0$), для якого потрібно знайти ціличислові розв'язки $(x; y)$.

Задачі, що вперше привели індусів до невизначених рівнянь, зводилися до *однорідних рівнянь*, тобто коли коефіцієнт c у рівнянні (1) дорівнює нулю:

$$ax + by = 0.$$

Зручніше останнє рівняння записати у вигляді

$$ax = by. \quad (2)$$





Однорідне лінійне діофантове рівняння (2) розв'язати дуже легко.

Важатимемо, що коефіцієнти a і b цього рівняння взаємно прості числа (інакше можна було б провести скорочення). Тоді $x : b$, тобто

$$x = nb, \text{ де } n \in Z.$$

Підставимо знайдений вираз для x в (2), маємо:

$$abn = by, y = an.$$

Отже, загальний розв'язок рівняння (2) має вигляд

$$\begin{cases} x = bn \\ y = an, \end{cases} \text{ де } n \in Z. \quad (3)$$

Зауважимо, що тут n – довільне ціле число, проте його значення в першому та другому виразах (3) (для x та y) одне й те саме.

З однорідними рівняннями (2) часто має справу й сучасна техніка.

Наприклад, для плавної роботи зчеплення з двох зубчастих коліс потрібно, щоб добуток кількості зубців на кількість обертів за одиницю часу одного колеса дорівнював аналогічному добутку для другого колеса. Так, якщо одне колесо робить 50 обертів за хвилину, а друге 80, то для кількості їхніх зубців, відповідно x і y , маємо однорідне діофантове рівняння

$$50x = 80y, 5x = 8y.$$

Загальним розв'язком цього рівняння є множина пар $(8n; 5n)$, де $n \in N$.

Приклад 1 Запишіть загальну формулу, що задає цілі точки прямої $20x + 28y = 0$.

Розв'язання

Рівняння даної прямої представимо у вигляді $5x = -7y$. Це – однорідне лінійне діофантове рівняння. Його загальним розв'язком, відповідно до (3), є пари чисел $(-7t; 5t)$, де $t \in Z$.

Відповідь. $(-7t; 5t)$, де $t \in Z$.

Приклад 2 Скільки цілих точок містить відрізок, що сполучає точки $(0; 0)$ і $(180; 500)$?





Розв'язання

Рівняння прямої, що проходить через задані точки, має вигляд $9x = 25y$.

Координати цілих точок цієї прямої (див. приклад 1) є пари чисел $(25t; 9t)$, де $t \in \mathbb{Z}$. Треба визначити, скільки значень t задовільняє умову

$$\begin{cases} 0 \leq 25t \leq 180 \\ 0 \leq 9t \leq 500 \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \leq 5t \leq 36 \\ 0 \leq 9t \leq 500 \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \leq t \leq 7 \\ 0 \leq t \leq 55 \end{cases}, \quad t \in \{0; 1; \dots; 7\}.$$

Маємо 8 значень t .

Відповідь. 8.

Знайдемо тепер загальний розв'язок *неоднорідного лінійного діофантового рівняння*, коли в (1) коефіцієнт c не дорівнює нулю. Можливі такі два випадки: числа a і b не є взаємно простими, числа a і b є взаємно простими.

Випадок 1. Числа a і b мають спільний множник, тобто не є взаємно простими, а число c не кратне спільному множнику чисел a і b (бо тоді ми просто поділили б рівняння на цей спільний множник). Тобто у множині цілих чисел: $a = k \cdot m$, $b = k \cdot n$ і $c \neq k \cdot l$.

Доведемо, що в цьому випадку рівняння не має цілих розв'язків.

Поділимо праву і ліву частини рівняння (1) на число k , маємо

$$\frac{a}{k}x + \frac{b}{k}y = \frac{c}{k}.$$

Ліва частина цього рівняння містить тільки цілі числа, а права – не належить множині цілих чисел (оскільки число c не кратне k). Тоді остання рівність неможлива на множині цілих чисел.

Сформулюємо висновок.

Лінійне неоднорідне діофантове рівняння (1) не має розв'язків, якщо числа a і b не взаємно прості.

Випадок 2. Числа a і b не мають спільного множника, тобто є взаємно простими числами.

Нехай пара чисел $(x_0; y_0)$ – один з розв'язків рівняння (1). Тоді

$$c = ax_0 + by_0, \quad ax + by = ax_0 + b, \quad x = x_0 - \frac{b}{a}(y - y_0).$$

За умовою b не ділиться на a . Тоді x буде розв'язком заданого рівняння для всіх $(y - y_0)$, кратних числу a , тобто тоді і тільки тоді, коли





$$\frac{y - y_0}{a} = k, \quad (y - y_0) = ka, \quad y = y_0 + ka, \quad x = x_0 - kb,$$

де k – ціле число ($k \in \mathbb{Z}$).

Сформулюємо висновок.

Загальним розв'язком лінійного діофантового рівняння (1), якщо числа a і b є взаємно простими, буде множина пар

$$\begin{cases} x = x_0 - kb \\ y = y_0 + ka, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (4)$$

Зауважимо, що вгадати якийсь із розв'язків лінійного діофантового рівняння нескладно. Розглянемо кілька прикладів.

Приклад 3 Знайдіть усі цілі розв'язки рівняння $4x - 8y = 2$.

Розв'язання

$$4x - 8y = 2 \Leftrightarrow 2x - 4y = 1 \Leftrightarrow (x; y) \in \emptyset.$$

Відповідь. Розв'язків немає.

Приклад 4 Розв'яжіть у цілих числах рівняння $4x - 3y = 2$.

Розв'язання

Легко бачити, що пара чисел $(2; 2)$ задовольняє рівняння. Тоді загальним його розв'язком, відповідно до (4), буде множина пар

$$\begin{cases} x = 2 + 3k \\ y = 2 + 4k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь. $(2 + 3k; 2 + 4k)$, де $k \in \mathbb{Z}$.

Приклад 5 Запишіть усю множину цілих розв'язків рівняння $24x + 13y = -15$.

Розв'язання

Пара чисел $(-3; 1)$ задовольняє рівняння. Тоді загальним розв'язком його буде

$$\begin{cases} x = -3 + 13k \\ y = 1 + 24k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь. $(-3 + 13k; 1 + 24k)$, де $k \in \mathbb{Z}$.

Приклад 6 Скільки цілих точок (точок, координати яких є цілими числами) містить відрізок, що сполучає точки $(1; 2)$ і $(-2; -3)$?

Розв'язання

Запишемо рівняння прямої, що проходить через задані точки:

$$-5x + 3y = 1.$$

Маємо лінійне діофантове рівняння. Пара чисел $(1; 2)$ задовольняє це рівняння. Тоді загальний його розв'язок, відповідно до (4), має вигляд

$$(1 + 3k; 2 + 5k), \text{ де } k \in \mathbb{Z}.$$

Знайдемо, які з розв'язків цього рівняння містяться між точками $(1; 2)$ і $(-2; -3)$:

$$\begin{cases} -2 \leqslant 1 + 3k \leqslant 1 \\ -3 \leqslant 2 + 5k \leqslant 2 \end{cases} \Leftrightarrow k \in \{-1; 0\}.$$

Відповідь. 2.

Приклад 7* На дощі було записано 20 перших чисел натурального ряду. Одне з них стерли. З'ясувалося, що серед 19 чисел, які залишилися, є число, що дорівнює середньому арифметичному цих 19 чисел. Яке число стерли?

Розв'язання

Додамо до першого числа останнє, до другого – передостаннє і т. д. Кожна така сума $(1 + 20; 2 + 19; \dots; 9 + 12; 10 + 11)$ дорівнює 21. Тоді сума перших двадцяти чисел натурального ряду дорівнює 210 (маємо 10 пар, сума яких дорівнює 21).

Нехай стерли число x , а середнє арифметичне чисел, що залишилися, дорівнює y . За умовою

$$\frac{210 - x}{19} = y, \text{ де } \{x; y\} \subset \{1; 2; \dots; 20\}.$$

Маємо лінійне діофантове рівняння

$$210 - x = 19y; 19y + x = 210.$$

Легко визначити окремий розв'язок цього рівняння: $(20; 10)$. Тоді загальний розв'язок має вигляд

$$\begin{cases} x = 20 - 10t \\ y = 10 + 20t. \end{cases}$$

Враховуючи, що $\{x; y\} \subset \{1; 2; \dots; 20\}$, маємо єдиний розв'язок $(20; 10)$.

Відповідь. 20.



Уміння розв'язувати лінійні діофантові рівняння може стати в нагоді при розв'язуванні задач практичного спрямування (див. завдання 4), на подільність, у тригонометрії (коли треба знайти спільні розв'язки двох тригонометричних рівнянь або вилучити сторонній розв'язок) тощо.

Приклад 8 Знайдіть натуральне число, яке при діленні на 3 дає остаточу 2, а при діленні на 5 – остаточу 3.

Розв'язання

Позначимо шукане число як a . Тоді за умовою:

$$a = 3x + 2 = 5y + 3,$$

де x і y – частки від ділення a на 3 і 5 відповідно.

Маємо лінійне діофантове рівняння

$$3x - 5y = 1.$$

Воно має розв'язки, бо числа 3 і 5 – взаємно прості.

Окремим розв'язком цього рівняння є $x = 2$, $y = 1$. Тоді загальний розв'язок має вигляд

$$\begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = 1 + 2t, \end{cases} \text{ де } t \in Z; a = 3(2 + 5t) + 2 = 8 + 15t.$$

За умовою шукане число є натуральним, тоді $t \geq 0$.

Відповідь. $8 + 15t$, де $t \in \{0\}; N\}$.

Приклад 9 Розв'яжіть рівняння $\left| \sin \frac{3x}{2} \right| \cos \frac{x}{3} = -1$.

Розв'язання

Задане рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} \cos \frac{x}{3} = -1 \\ \left| \sin \frac{3x}{2} \right| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{3} = \pi + 2\pi n \\ \frac{3x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ \{n, k\} \in Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3\pi + 6\pi n \\ x = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3} \\ \{n, k\} \in Z. \end{cases} (*)$$

Шукане x є перетином множин розв'язків першого і другого рівнянь системи, тобто коли

$$3\pi + 6\pi n = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3} \Leftrightarrow 9 + 18n = 1 + 2k \Leftrightarrow 18n - 2k = -8 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow k - 9n = 4.$$



Останнє рівняння є лінійним діофантовим рівнянням, одним з його розв'язків є $k_0 = 4$, $n_0 = 0$. Тоді загальним розв'язком цього рівняння буде множина пар

$$\begin{cases} k = 4 + 9t \\ n = 0 + t, \end{cases} \text{де } t \in Z.$$

Підставимо знайдене значення n у вираз $x(n)$ системи (*). Шуканий розв'язок задачі: $x = 3\pi + 6\pi t$.

Зауважимо, якщо підставити знайдене значення k у друге співвідношення системи (*), тобто у вираз $x(k)$, то отримаємо той самий розв'язок. Переївірте це самостійно.

Відповідь. $x = 3\pi + 6\pi t$, де $t \in Z$.

Приклад 10* Розв'яжіть рівняння $\frac{4\sin x \cos^2 x - \sin x}{\cos 3x - 1} = 0$.

Розв'язання

Легко бачити, що задане рівняння рівносильне умові

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos 3x \neq 1 \\ \sin x = 0 \\ |\cos x| = \frac{1}{2} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \neq \frac{2\pi n}{3} \\ x = \pi k \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi t, \end{array} \right. \begin{array}{l} (*) \\ \text{де } \{n, k, t\} \in Z. \\ (**) \end{array}$$

Розв'язком задачі буде сукупність (**), за умови, що з неї вилучено значення x , що збігаються зі значеннями $x = \frac{2\pi n}{3}$.

1) Знайдемо заборонені значення k , тобто коли

$$k = \frac{2n}{3} \Leftrightarrow 3k - 2n = 0.$$

Останнє рівняння є лінійним однорідним діофантовим рівнянням. Тоді із сукупності (**) треба вилучити всі $k = 2m$, $m \in Z$, тобто парні значення k .

2) Знайдемо заборонені значення t , тобто коли

$$\pm \frac{1}{3} + t = \frac{2n}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} 2n - 3t = 1 \\ 2n - 3t = -1. \end{cases}$$

Окремими розв'язками цих рівнянь будуть відповідно:

$$\begin{cases} n_0 = 4 \\ t = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} n_0 = 2 \\ t = 1. \end{cases}$$





Потрібно вилучити всі $t = 1 + 2p$, $p \in Z$ і $t = 1 + 2l$, $l \in Z$, тобто непарні значення t .

Маємо, що розв'язком задачі буде сукупність

$$\begin{cases} x = \pi k \\ k \neq 2m \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi t \quad \text{де } \{k, m, t, d\} \in Z, \\ t \neq 1 + 2d, \end{cases}$$

тобто

$$\begin{cases} x = \pi(2k + 1) \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi t, \quad \{k, t\} \in Z. \end{cases}$$

Відповідь. $x \in \left\{ \pi(2k + 1); \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi t \right\}$, де $\{k, t\} \in Z$.

НЕЛІНІЙНІ ДІОФАНТОВІ РІВНЯННЯ

Ще Діофант поряд з лінійними рівняннями (рівняннями першого степеня) розглядав квадратні й кубічні невизначені рівняння. Розв'язування таких рівнянь взагалі є дуже складною задачею.

П'єр Ферма (1601–1665), видатний юрист, якого Паскаль вважав кращим математиком того часу, на полях книги Діофанта записав: «*Hi куб на два куби, ні який інший степінь, окрім квадрата, не можна представити як суму двох таких самих степенів. Я знайшов чудове доведення того. Проте ширина поля не дозволяє тут його здійснити*». Доведення цієї теореми, яку називають великою теоремою Ферма, шукають і нині.

ВЕЛИКА ТЕОРЕМА ФЕРМА – УЗАГАЛЬНЕННЯ ТЕОРЕМИ ПІФАГОРА

Усім відомо, якщо катети прямокутного трикутника мають довжини x і y , а гіпотенуза – z , то за теоремою Піфагора виконується рівність

$$x^2 + y^2 = z^2. \quad (*)$$

Це невизначене рівняння з трьома невідомими. Один з розв'язків цього рівняння (3; 4; 5) відповідає довжинам сторін єгипетського трикутника, або трикутника Піфагора.



Загальний розв'язок рівняння (*) у натуральних числах має вигляд

$$\begin{aligned}x &= 2ab, \\y &= b^2 - a^2, \\z &= b^2 + a^2,\end{aligned}$$

де a і b – довільні натуральні числа, за умови $a < b$.

Те, що вказані числа задовільняють рівняння (*), випливає з тотожності

$$(2ab)^2 + (b^2 - a^2)^2 = (a^2 + b^2)^2.$$

Наприклад, для $a \in \{1; 2; 3\}$ маємо:

$a = 1$

b	x	y	z
2	4	3	5
4	8	15	17
6	12	35	37
8	16	63	65

$a = 2$

b	x	y	z
3	12	5	13
5	20	21	29
7	28	45	53
9	36	77	85

$a = 3$

b	x	y	z
4	24	7	25
8	48	55	73
10	60	91	109
14	84	187	205

Виникає питання, чи мають розв'язки аналогічні рівняння виду

$$x^3 + y^3 = z^3$$

$$x^4 + y^4 = z^4$$

.....

$$x^n + y^n = z^n?$$

Математики XVI–XVII ст. намагалися розв'язати ці рівняння в цілих числах, але не мали успіху. П'єр Ферма дійшов висновку, що вказані рівняння не мають розв'язків на множині натуральних чисел для всіх $n > 2$. Загального доведення великої теореми Ферма не існує й донині.

Л. Ейлер (1707–1783) довів, що рівняння $x^3 + y^3 = z^3$ і $x^4 + y^4 = z^4$ не мають розв'язків у натуральних числах. *А. Лежандр* (1752–1833) і *Г.Л. Діріхле* (1805–1859) довели аналогічне для рівняння $x^5 + y^5 = z^5$.

Г. Ламе (1795–1870) зумів довести велику теорему Ферма для випадку $n = 7$.

На сьогодні її довели для всіх степенів, менших від 619, і кількох більших значень степеня.

Ця теорема набула широкої популярності у математичній літературі, спроби її довести сприяли відкриттю нових мето-





дів розв'язування задач. Тому її називають *великою теоремою Ферма*.

СПОСІБ РОЗКЛАДАННЯ НА МНОЖНИКИ. ТЕОРЕМА БЕЗУ

Слідом за великими математиками спробуємо розв'язати окремі нелінійні невизначені рівняння. Деякі з них нескладно розв'язуються, наприклад способом розкладання багаточлена на множники. Розглянемо кілька прикладів.

Приклад 11 Знайдіть усі цілі розв'язки $(x; y)$ рівняння $xy = x + y + 3$.

Розв'язання

Перепишемо задане рівняння у вигляді

$$(x - 1)(y - 1) = 4.$$

Ліва частина останнього рівняння – добуток чисел $(x - 1)$ і $(y - 1)$. Праву частину рівняння можна представити як добуток чисел: 1 і 4, або -1 і -4 , або 2 і 2, або -2 і -2 , або 4 і 1, або -4 і -1 . Тоді після розв'язування відповідних систем лінійних рівнянь отримаємо: $x = 2$ і $y = 5$, або $x = 0$ і $y = -3$, або $x = 3$ і $y = 3$, або $x = -1$ і $y = -1$, або $x = 5$ і $y = 2$, або $x = -3$ і $y = 0$.

Відповідь. $(2; 5), (0; -3), (3; 3), (-1; -1), (5; 2), (-3; 0)$.

Приклад 12 Знайдіть усі натуральні числа x і y , такі, що $4x^2 - y^2 = 28$, тобто знайдіть усі розв'язки даного рівняння в натуральних числах.

Розв'язання

1) Розкладемо ліву частину рівняння на множники: $4x^2 - y^2 = (2x - y)(2x + y)$.

2) Число $2x$ – парне, тоді, якщо y – непарне, то числа $(2x - y)$ і $(2x + y)$ – непарні, і їхній добуток буде непарним, чого бути не може (28 – число парне). Маємо, що y – число парне.

3) Розкладемо число 28 на парні множники: $28 = 2 \cdot 14$.

4) Врахуємо, що x і y за умовою – натуральні числа. Тоді $(2x - y) < (2x + y)$. Маємо $(2x - y) = 2$ і $(2x + y) = 14$. Звідси $x = 4$, $y = 6$.

Відповідь. $x = 4$, $y = 6$.

Приклад 13 З'ясуйте, чи має рівняння $x^2 - xy - 2y^2 = 12$ розв'язки в цілих числах.





Розв'язання

1) Розкладемо ліву частину даного рівняння на множники:
 $x^2 - y^2 - (xy + y^2) = (x + y)(x - 2y) = (x + y)((x + y) - 3y)$.

2) Число 12 ділиться на 3, тоді один з множників лівої частини рівняння ділиться на 3. Якщо це множник $(x + y)$, то і другий множник $((x + y) - 3y)$ теж ділиться на 3. І навпаки, якщо другий множник ділиться на 3, то і вираз $(x + y)$ кратний числу 3. Тобто ліва частина рівняння кратна числу 9.

3) Ліва частина рівняння кратна числу 9, тоді число 12 теж кратне числу 9, чого бути не може. Тобто не існує таких цілих чисел x і y , для яких $x^2 - xy - 2y^2$ дорівнює 12.

Відповідь. Не існує таких цілих чисел x і y .

Приклад 14 Знайдіть усі трицифрові числа, кожне з яких дорівнює добутку чисел, одне з яких записано двома його останніми цифрами, а друге – його останньою цифрою.

Розв'язання

Запишемо шукане число як \overline{abc} . Тоді за умовою

$$100a + 10b + c = (10b + c)c.$$

Маємо діофантове рівняння, розв'язки якого належать множині $\{0, 1, \dots, 9\}$, до того $a \neq 0$ (як перша цифра трицифрового числа).

Зрозуміло, що $c \neq 0$. Перепишемо рівність у вигляді

$$100a = (10b + c)(c - 1).$$

Ліва частина рівності ділиться на 25, тоді права теж кратна числу 25. Якщо $(c - 1)$ ділиться на 5, то $(10b + c)$ не ділиться на 5. Число $(c - 1)$ не може бути кратним числу 25 (бо c – цифра). Тоді $(10b + c) : 25$.

Звідси $c = 5$, $b = 2$ або $b = 7$ (тобто $(10b + c) \in \{25; 75\}$). Для a маємо відповідно значення 1 або 3.

Відповідь. 125; 375.

Приклад 15 Сума двох цілих чисел дорівнює 101, а різниця їхніх квадратів – просте число. Знайдіть ці числа.

Розв'язання

Позначимо шукані числа як a і b . Тоді за умовою: $a + b = 101$, $a^2 - b^2 = p$, де p – просте число. Маємо:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) = 101(a - b) = p.$$

Тоді просте число p кратне числу 101, що можливо лише у випадку



$$p = 101, \begin{cases} a - b = 1 \\ a + b = 101. \end{cases}$$

З останньої системи маємо: $a = 51$; $b = 50$.
Відповідь. 51 і 50.

Приклад 16* Розв'яжіть у цілих числах рівняння
 $x^4 - 2y^2 = 1$.

Розв'язання

Задане рівняння містить невідомі у парних степенях, тобто якщо $(x_0; y_0)$ є розв'язком, то і пари чисел $(-x_0; y_0)$, $(x_0; -y_0)$, $(-x_0; -y_0)$ теж є розв'язками заданого рівняння. Тому будемо шукати тільки невід'ємні розв'язки.

Число $x^4 - 1$ парне, тоді x – непарне, тобто $x = 2t + 1$. Після розкладання $x^4 - 1$ на множники $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$ маємо:

$$2t \cdot (2t + 2)(4t^2 + 4t + 2) = 2y^2.$$

Тоді y – парне, $y = 2z$, і маємо рівняння

$$t \cdot (t + 1)((t + 1)^2 + t^2) = z^2.$$

Числа t , $t + 1$ – взаємно прості (див. властивість 11, § 1).

Ліва частина останньої рівності – добуток трьох взаємно простих чисел, а права – повний квадрат. За твердженням 14 (див. § 1), кожний з множників лівої частини рівняння – повний квадрат. Тобто $t = \alpha^2$, $t + 1 = \beta^2$, де $\alpha \geq 0$ і $\beta \geq 0$ є ціліми числами. Тоді з умови

$$(\beta + \alpha)(\beta - \alpha) = 1$$

маємо:

$$(\beta + \alpha) = 1, (\beta - \alpha) = 1; \alpha = 0, \beta = 1.$$

Звідси $t = 0$ і $y = 0$, $x = \pm 1$.

Відповідь. $(1; 0)$, $(-1; 0)$.

Ви вже зрозуміли, що найпопулярнішим методом розв'язування нелінійних діофантових рівнянь є розкладання на множники. Для розкладу багаточлена на множники можна застосовувати всі відомі способи (винесення спільного множника, групування, виділення повного квадрата, формули скороченого множення тощо) й застосовувати їх у різних послідовностях.

Може стати в нагоді й *теорема Безу*. Перш ніж довести теорему Безу, розглянемо ділення багаточлена на багаточлен.

Приклад 17 Виконайте ділення на $x - 1$ багаточлена $P_3 = x^3 - 2x^2 - x + 1$.

Розв'язання

$$\begin{array}{r} x^3 - 2x^2 - x + 1 \\ \underline{-} x^3 - x^2 \\ \hline -x^2 - x \\ \underline{-} x^2 + x \\ \hline -2x + 1 \\ \underline{-} -2x + 2 \\ \hline -1 \leftarrow \text{остача} \end{array}$$

Отже, $x^3 - 2x^2 - x + 1 = (x - 1)(x^2 - x - 2) - 1$.

Відповідь. $x^3 - 2x^2 - x + 1 = (x - 1)(x^2 - x - 2) - 1$.

Приклад 18 При яких значеннях a і b багаточлен $P_4 = x^4 + x^3 + ax + 4x + b + 2a$ ділиться без остачі на тричлен $Q_2 = x^2 + 2x + 2$?

Розв'язання

Виконаємо ділення:

$$\begin{array}{r} x^4 + x^3 + 0 \cdot x^2 + (a + 4)x + (b + 2a) \\ \underline{-} x^4 + 2x^3 + 2x^2 \\ \hline -x^3 - 2x^2 + (a + 4)x \\ \underline{-} -x^3 - 2x^2 - 2x \\ \hline (a + 6)x + (b + 2a) \leftarrow \text{остача} \end{array}$$

Остача $(6 + a)x + (b + 2a)$ дорівнює нулю при довільних значеннях x за умови $(a + 6) = 0$ і $(b + 2a) = 0$. Тоді $a = -6$, $b = 12$.

Відповідь. $a = -6$, $b = 12$.

Теорема Безу. Остача від ділення полінома $P_n(x)$ на двочлен $x - a$ дорівнює значенню цього полінома при $x = a$, тобто

$$P_n(x) = (x - a)Q_{n-1} + P_n(a).$$

Доведення

Нехай при діленні полінома $P_n(x)$ на двочлен $x - a$ отримаємо остачу R . Тобто $P_n(x) = (x - a)Q_{n-1} + R$. Тоді при $x = a$ отримаємо $P_n(a) = 0 \cdot Q_{n-1} + R = R$.

Щ. в. д.



Наслідок. Якщо рівняння $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0$ має раціональний корінь $\frac{p}{q}$, то p є дільником числа a_0 , а q – дільником числа a_n . Зокрема, його цілим коренем може бути лише дільник числа a_0 .

Приклад 19 Знайдіть усі цілі розв'язки рівняння
 $x^3 + x^2 - 8x - 6 = 0$.

Розв'язання

Цілі корені даного рівняння є множниками числа 6, тобто ними можуть бути лише числа $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$. Перевіркою переконаємося, що $x = -3$ є розв'язком. Діленням многочленів $x^3 + x^2 - 8x - 6$ на $x + 3$ отримаємо частку $x^2 - 2x - 2$. Тоді дане рівняння рівносильне

$$(x + 3)(x^2 - 2x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x^2 - 2x - 2 = 0. \end{cases}$$

Друге рівняння сукупності не має цілих коренів.
Відповідь. -3 .

Приклад 20 Розв'яжіть у цілих числах рівняння
 $x^3 - 2x^2 - x + (x^2 - x - 2)(y + 1) = 2$.

Розв'язання

Виконаємо ділення тричлена $x^3 - 2x^2 - x$ на $x^2 - x - 2$. Маємо у частці $x - 1$ і в остачі -2 . Тобто

$$x^3 - 2x^2 - x = (x - 1)(x^2 - x - 2) - 2.$$

Тоді задане рівняння можна представити у вигляді

$$(x^2 - x - 2)(x + y) = 4.$$

Ліва частина останнього рівняння – добуток цілих чисел $(x^2 - x - 2)$ і $(x + y)$. Праву частину рівняння можна представити як добуток чисел: 1 і 4, або 4 і 1, або -1 і -4 , або -4 і -1 , або 2 і 2, або -2 і -2 . Тоді після розв'язування відповідних систем лінійних рівнянь, отримаємо: $(3; -2), (-2; 3), (0; -2), (1; -3)$.

Відповідь. $(3; -2), (-2; 3), (0; -2), (1; -3)$.

ПАРНІСТЬ І ПОДІЛЬНІСТЬ ПРИХОДЯТЬ НА ДОПОМОГУ

Розглянемо приклади розв'язування нелінійних діофантових рівнянь способами, відмінними від розкладання на множники.





Приклад 21 Чи можна розмінити 100 грн., якщо є купюри номіналом 1 грн., 3 грн. і 5 грн., так, щоб у розміні було використано рівно 13 купюр?

Розв'язання

Нехай у розміні беруть участь x купюр номіналом 1 грн., $y - 3$ грн., $z - 5$ грн. Тоді

$$(x + y + z) = 13, \quad (x + 3y + 5z) = 100.$$

Маємо: $(x + y + z) + (2y + 4z) = 100$, де число $(x + y + z)$ непарне, а $(2y + 4z)$ і 100 – парні.

Відповідь. Ні.

Приклад 22* Знайдіть усі цілі числа m і n , що задовольняють рівняння $3 \cdot 2^m + 1 = n^2$.

Розв'язання

З умови маємо, що число n не кратне числу 3. Тоді можливі два випадки: $n = 3k + 2$ або $n = 3k + 1$.

1) Якщо $n = 3k + 2$, маємо:

$$3 \cdot 2^m + 1 = 9k^2 + 12k + 4 \Leftrightarrow 2^m = 3k^2 + 4k + 1 \Leftrightarrow 2^m = (3k + 1)(k + 1).$$

Множники правої частини останнього рівняння є степенями двійки. Тоді $k \in \{0; 1\}$ (бо при $k \geq 2$ маємо $4(k + 1) > 3k + 1 > 2(k + 1)$ і $k + 1$ та $3k + 1$ не можуть одночасно бути степенями двійки).

Тоді $n = 2$ і $m = 0$, або $n = 5$ і $m = 3$.

2) Якщо $n = 3k + 1$, маємо:

$$3 \cdot 2^m + 1 = 9k^2 + 6k + 1 \Leftrightarrow 2^m = 3k^2 + 2k \Leftrightarrow 2^m = k(3k + 2).$$

Враховуючи, що множники добутку у правій частині останнього рівняння є степенями двійки, отримаємо: $k = 2$.

Тоді $n = 7$ і $m = 4$.

Відповідь. $n = 2$ і $m = 0$, або $n = 5$ і $m = 3$, або $n = 7$ і $m = 4$.

Приклад 23* Доведіть, що рівняння $x! + y! = 10z + 9$ не має розв'язків у цілих числах.

Зауважимо, що вираз $n! = n(n - 1)(n - 2)\dots 1$ називають **факторіалом**. За означенням $0! = 1$. (Більш детально з поняттям факторіала ви ознайомитеся в наступному параграфі.)

Розв'язання

Права частина даного рівняння непарна, отже, й ліва теж повинна бути непарним числом. Тому одне із чисел x , y менше від 2. Нехай (для визначеності) $x! = 1$. Тоді $y! = 10z + 8$.





Права частина останнього рівняння не ділиться на 5, отже, $y < 5$.

Перевіркою переконуємося, що жодне значення $y \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$ не задовільняє рівняння.

Отже, задача не має розв'язків у цілих числах.

ІІІ. в. д.

Приклад 24* Розв'яжіть у цілих числах рівняння

$$x^2 + 2y^2 = z^2.$$

Розв'язання

1) Розглянемо випадок $z = 0$. Маємо розв'язок $\{0; 0; 0\}$.

2) У випадку $z \neq 0$ розділимо задане рівняння на z і по-
значимо $\frac{x}{z} = t$, $\frac{y}{z} = u$. Тоді маємо рівняння

$$t^2 + 2u^2 = 1, \quad (**)$$

де t і u – раціональні числа.

Якщо $(t; u)$ і $(t_0; u_0)$ – два його раціональних розв'язки, то буде раціональним числом і відношення $\frac{t - t_0}{u - u_0} = k = \frac{m}{n}$, де m і n – цілі числа.

Очевидним розв'язком рівняння $(**)$ буде $t_0 = 1$, $u_0 = 0$.
Тоді $\frac{t - 1}{u} = k$ і з системи

$$\begin{cases} t^2 + 2u^2 = 1 \\ t = uk + 1, \end{cases}$$

маємо рівняння відносно u

$$u^2k^2 + 2uk + 1 + 2u^2 = 1.$$

Звідси розв'язком системи буде сукупність: $t = 1$, $u = 0$
або $u = \frac{2k}{k^2 + 2}$, $t = \frac{3k^2 + 2}{k^2 + 2}$.

Зауважимо, що остання сукупність рівносильна множині
 $u = \frac{2k}{k^2 + 2}$, $t = \frac{3k^2 + 2}{k^2 + 2}$, де k – довільне раціональне число. Після підстановки $k = \frac{m}{n}$ отримаємо:

$$u = \frac{2mn}{m^2 + 2n^2}, \quad t = \frac{3m^2 + 2n^2}{m^2 + 2n^2}.$$



Звідси маємо розв'язки заданого рівняння: $(2mn; 3m^2 + 2n^2; m^2 + 2n^2)$, або $(-2mn; -(3m^2 + 2n^2); -(m^2 + 2n^2))$, де m і n довільні цілі числа за умови $n \neq 0$; або $(0; 0; 0)$.

Відповідь. $(2mn; 3m^2 + 2n^2; m^2 + 2n^2)$, $(-2mn; -(3m^2 + 2n^2); -(m^2 + 2n^2))$, де $\{m; n\} \subset Z$.

ЗАВДАННЯ 4

- Двоцифрове число у 6 разів більше за суму його цифр. Знайдіть це число.
- Чи можна з 20 монет номіналом 5, 20 і 50 коп. скласти суму 5 грн.?
- Куплено апельсини та яблука на загальну суму 53 грн. Скільки було куплено апельсинів і скільки яблук, якщо один апельсин коштує 7 грн., а яблуко – 4 грн.?
- Чи можна купюру 5 тугриків розмінити монетами по 5 коп., 50 коп. та 2 тугрики так, щоб загальна кількість монет дорівнювала 20? (1 тугрик = 100 коп.)
- Запишіть у загальному вигляді координати цілих точок прямої $252x - 84y = 0$.
- Скільки цілих точок (точок, координати яких є цілими числами) містить відрізок, що сполучає точки:
а) $(0; 0)$ і $(3; 2)$; б) $(0; 0)$ і $(-56; 72)$?
- Знайдіть усі цілі розв'язки рівняння:
а) $3x + 8y = 2$; б) $5y + 8x = 49$; в) $-42y + 54x + 18 = 0$;
г) $24x - 48y = 36$.
- Знайдіть множину всіх цілих чисел, кожне з яких при діленні на 4 дає в остачі 1, а при діленні на 6 дає в остачі 3.
- У кімнаті стоять табурети і стільці. Кожен табурет має 3 ніжки, а стілець – 4. Якщо на всіх табуретах і стільцях сидять люди, в кімнаті 39 ніг. Скільки в кімнаті табуретів і скільки стільців?
- Фабрика випустила товар у пачках вагою по 3 кг і по 5 кг. Дovedіть, що із цих пачок можна скласти будь-яку вагу, більшу за 7 кг.
- Розв'яжіть у цілих числах рівняння:
а) $(x - 2)(xy + 4) = 1$; б) $2x^2 + xy = x + 7$;
в) $y + x = xy$; г) $y^2 - 2xy - 2x = 6$.
- Знайдіть усі цілі числа x і y , що задовольняють умову:
а) $xy + 2x + y - 3 = 0$; б) $xy + 3x - 2y - 13 = 0$.
- Скільки цілих точок (точок, координати яких є цілими числами) містяться на відрізку, що сполучає точки:
а) $(20; 0)$ і $(0; 28)$; б) $(20; 20)$ і $(-36; 92)$?



14*. Один майстер у рейці завдовжки 3 м свердлить отвори на відстані 20 см один від одного; потім другий майстер у тій самій рейці свердлить отвори на відстані 12 см один від одного.

а) Скільки всього отворів вони зроблять у цій рейці?

б) Яка найменша відстань між отворами?

15*. На меблевій фабриці виготовляють табурети із чотирма і трьома ніжками. На складі є 786 484 ніжки. При виготовленні продукції треба використати всі ніжки.

а) Чи можна виготовити однакову кількість табуретів обох видів?

б) На яку мінімальну кількість можна виготовити табуретів із чотирма ніжками більше, ніж з трьома?

в) На яку мінімальну кількість можна виготовити табуретів із чотирма ніжками менше, ніж з трьома?

г) Яку максимальну кількість табуретів можна виготовити?

д) Яку мінімальну кількість табуретів можна виготовити?

е) Відомо, що ціна однієї ніжки більша за 50 коп., але менша від 80 коп., а ціна всіх ніжок – ціла кількість гривень. Скільки коштують усі 786 484 ніжки?

16*. Є контейнери вагою по 130 кг і по 160 кг. Треба завантажити ними 3-тонну вантажівку. Як це можна зробити? (Укажіть усі можливості.)

17. При яких значеннях a і b багаточлен:

а) $2x^3 + ax^2 - 8x + b$ ділиться без остачі на $x^2 - 6x + 5$;

б) $x^4 + ax^3 + bx^2 + 3x - 9$ ділиться без остачі на $(x + 3)^2$?

18. Знайдіть усі цілі розв'язки рівняння:

а) $x^3 - x^2 - 8x + 12 = 0$; б) $x^4 - 4x^3 + 8x + 3 = 0$.

19*. Знайдіть усі цілі розв'язки рівняння:

а) $x^3 + 9x^2 + 23x + 15 - (x^2 + 8x + 15)(y + 2) = 1$;

б) $2x^3 - 2x^2 - 10x + (x^2 - 2x - 3)(y + 1) = 11$.

20*. Доведіть, що рівняння не має розв'язків у цілих числах:

а) $x^2 - 3y = 17$; б) $3x^2 - 4y^2 = 13$.

21*. З'ясуйте, чи має рівняння розв'язки в цілих числах:

а) $x^2 - 7y = 10$; б) $y^3 + x^2y - 2x^3 = 18$.

22*. Знайдіть усі цілі числа m і n , що задовольняють рівняння $3^m + 7 = 2^n$.

23*. Розв'яжіть рівняння:

а) $\sin 5x + \sin x = 2$; б) $\sin 3x |\cos 4x| = 1$;

в) $\sin^2 3x + \cos 4x = 2$; г) $\cos^3 3x + \cos^{11} 7x = -2$;

д) $\frac{\operatorname{tg} x}{\sin 5x} = 0$;

е) $\frac{\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} 3x}{\sin 0,25x + \cos 0,25x} = 0$.

24*. Розв'яжіть у цілих числах рівняння:

- a) $x! + y! = (x + y)!$;
- б) $15x^3 + 2x - 1 = 4x^2y(x^2y - x + 1)$;
- в) $x^3 + 91 = y^3$.

25*. Розв'яжіть у простих числах рівняння $x^2 - 2y^2 = 1$.

26*. Розв'яжіть у натуральних числах рівняння:

- а) $x(y + 1)^2 = 243y$; б) $x + y + z = xyz$.

27*. Розв'яжіть у цілих числах систему рівнянь $\begin{cases} y + z = 10 + x \\ yz = 10x + 1 \end{cases}$.

28*. Розв'яжіть у натуральних числах систему рівнянь

$$\begin{cases} y + x + z = 14 \\ x + yz = 19. \end{cases}$$

29*. Для довільного натурального числа n знайдіть усі додатні цілі числа x і y , які задовольняють рівняння $xy = n \cdot (x + y)$. $x = n + k$, $y = n + \frac{n^2}{k}$, де k – дільники n^2 .

30*. Розв'яжіть у натуральних числах рівняння $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$.

§ 5. Арифметика цифр у комбінаторних задачах

У цьому параграфі будемо обговорювати питання: Скільки існує ... чисел, таких що ...?; Скількома способами ...?

Головне при розв'язуванні таких задач – не помилитися, коли у підрахунку варіантів слід множити, а коли додавати.

ПРАВИЛО МНОЖЕННЯ

• Якщо об'єкт a_1 можна обрати n_1 різними способами і після кожного вибору a_1 об'єкт a_2 можна обрати n_2 способами, то кількість способів, якими можна обрати a_1 і a_2 , дорівнює добутку $n_1 \cdot n_2$.

ПРАВИЛО ДОДАВАННЯ

• Якщо об'єкт a можна обрати n різними способами, а об'єкт b можна обрати m способами, причому a і b ніколи не збігаються, то кількість способів, якими можна обрати або a , або b , дорівнює сумі $n + m$.



Розглянемо кілька прикладів.

Приклад 1 Скільки існує натуральних чисел із кількістю цифр не більшою за 3, які при діленні на 3 дають в остачі 2?

Розв'язання

Шукані числа a можна представити у вигляді $a = 3n + 2$, де $n \in N$, $a \leq 99$. Тоді числа $b = a - 2 = 3n$, $n \in N$, $b \leq 97$ складають арифметичну прогресію з першим членом $b_1 = 3$ і останнім $b_n = 96$.

З умови $96 = 3 + 3(n - 1)$ знаходимо, що $n = 32$.

Відповідь. 32.

Приклад 2 Скільки існує двоцифрових чисел, у запису яких цифра 2 зустрічається рівно один раз?

Розв'язання

У кожному десятку, окрім другого, маємо по одному такому числу – 9 чисел. У другому десятку таких чисел $10 - 1 = 9$ (бо в одному числі двійка зустрічається двічі).

Загалом маємо $9 + 9 = 18$ чисел.

Відповідь. 18.

Приклад 3 Назовемо натуральне число «цікавим», якщо у його запису використано лише непарні цифри. Скільки існує чотирицифрових «цікавих» чисел?

Розв'язання

Непарних цифр маємо п'ять – першу цифру записуємо п'ятьма способами. Другу непарну цифру можна дописати знову-таки п'ятьма способами і т. д. Тоді «цікавих» чотирицифрових чисел буде $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$.

Відповідь. 625.

Приклад 4 Скільки існує трицифрових чисел, у запису яких цифри 1, 2, 3 зустрічаються рівно по одному разу?

Розв'язання

На перше місце можна поставити довільну з даних цифр (три можливості), на друге – довільну з двох інших (две можливості), а на третє – цифру, що залишилася (одна можливість). Таким чином, загалом маємо $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ чисел.

Відповідь. 6.



Приклад 5 Скількома способами можна поставити на шахову дошку білу та чорну тури так, щоб вони не «били» одну одну?

Розв'язання

Білу тuru можна поставити на довільну із 64 клітинок шахової дошки. Незалежно від місця розміщення вона буде «бити» $7 + 7 + 1 = 15$ клітинок (разом з тією, на якій стоїть).

Залишилося $64 - 15 = 49$ клітинок, на яких можна розміщати чорну туру.

Загалом маємо

$$64 \cdot 49 = 3136 \text{ способів розміщення.}$$

Відповідь. 3136.

Приклад 6 Скількома способами можна поставити на шахову дошку білого та чорного королів так, щоб вони не «били» один одного?

Розв'язання

Білого короля можна поставити на довільну із 64 клітинок шахової дошки. Проте кількість клітинок, яку він буде «бити», залежить від його розміщення на полі. Тому треба розглянути три можливих варіанти.

1) Якщо білий король стоїть в кутку (кутових клітинок маємо 4), то він «б'є» 4 клітинки (разом з тією, на якій стоїть). Тоді для чорного короля залишається $64 - 4 = 60$ клітинок. Усього таких варіантів маємо $4 \cdot 60$.

2) Якщо білий король стоїть на краю дошки, але не в кутку (таких клітинок маємо $(8 - 2) \cdot 4 = 24$), то він «б'є» 6 клітинок (разом з тією, на якій стоїть). Тоді для чорного короля залишається $64 - 6 = 58$ клітинок. Усього таких варіантів маємо $24 \cdot 58$.

3) Якщо білий король стоїть не на краю дошки (таких клітинок маємо $64 - 7 \cdot 4 = 36$), то він «б'є» 9 клітинок (разом з тією, на якій стоїть). Тоді для чорного короля залишається $64 - 9 = 55$ клітинок. Усього таких варіантів маємо $36 \cdot 55$.

Загалом маємо способів розміщення даних фігур:

$$4 \cdot 60 + 24 \cdot 58 + 36 \cdot 55 = 3612.$$

Відповідь. 3612.





ПЕРЕСТАНОВКИ

Зауважимо, що саме у підрахунку варіантів, пов'язаних із перестановкою елементів, маємо добуток.

Добуток $n(n-1)(n-2)\dots(2) \cdot 1$ називають *n-факторіалом* і позначають як $n!$. Це поняття дуже важливе у розв'язуванні комбінаторних задач.

Обчислимо значення $n!$ для кількох перших значень n .

$$1! = 1;$$

$$2! = 2 \cdot 1 = 2;$$

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6;$$

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24;$$

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120;$$

.....

Для зручності запису деяких комбінаторних тотожностей (які ви будете вивчати в старших класах) вважають (за означенням), що $0! = 1$.

Зрозуміло, що

$$\frac{n!}{(n-m)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-m) \cdot (n-m+1) \cdot \dots \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-m)} = (n-m+1) \cdot \dots \cdot n,$$

якщо $m < n$.

Легко довести міркуваннями, аналогічними до розв'язування прикладу 4, таке загальне твердження.

- Число можливих перестановок P_n у групі з n елементів дорівнює $n!$.

Приклад 7 Обчисліть кількість «цікавих» п'ятицифрових цифр (див. приклад 3), усі цифри яких різні.

Розв'язання

Усього маємо п'ять непарних цифр. На перше місце цифру записуємо п'ятьма способами, на друге – чотирма, на третє – трьома, на четверте – двома, на п'яте – одним. Маємо загалом $P_5 = 5! = 120$ шуканих чисел.

Відповідь. 120.

Зauważення. Користуючись поняттям перестановки, можна було відразу записати відповідь до останнього прикладу, як кількість перестановок п'яти цифр: $P_5 = 5!$.

Приклад 8 Скільки п'ятицифрових чисел можна утворити із цифр 2, 3, 4, 5, 6 (без повторення), в яких непарні цифри стоять поряд?



Розв'язання

Умовно об'єднаємо цифри 3 і 5. Тоді п'ятицифрових чисел, що утворено з даних за умовою цифр і які містять пару (3; 5), маємо P_4 .

Врахуємо, що за умовою цифри 3 і 5 можна міняти між собою місцями. Це можна здійснити P_2 способами.

Отже, загалом маємо $P_4 \cdot P_2 = 4! \cdot 2! = 48$ шуканих чисел.

Відповідь. 48.

Вузлик на згадку.

- Кількість перестановок з n елементів, за умови, що два певних елементи a і b стоять поряд, дорівнює $P_{n-1} \cdot P_2 = 2 \cdot (n - 1)!$

РОЗМІЩЕННЯ

Розглянемо, як зміниться розв'язок у прикладі 7, якщо розрядів числа буде менше ніж п'ять.

Приклад 9 Обчисліть кількість «цікавих» трицифрових чисел (див. приклад 3), усі цифри яких різні.

Розв'язання

Усього маємо п'ять непарних цифр. На перше місце цифру записуємо п'ятьма способами, на друге – чотирма, на третє – трьома. Тобто маємо загалом $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ шуканих чисел.

Відповідь. 60.

Зауваження. В останньому прикладі ми рахували, скількома способами можна вибрати три елементи з п'яти, кажуть *кількість розміщень* з п'яти елементів по три, а відповідь до цієї задачі можна представити у вигляді $\frac{5!}{(5 - 3)!}$.

Міркуваннями, аналогічними до розв'язування цього прикладу, легко довести таке загальне твердження.

- Кількість A_n^m розміщень з n елементів по m дорівнює

$$\frac{n!}{(n - m)!}.$$

Зверніть увагу, що у прикладах 7–8 перестановка цифр приводила до різних чисел. Проте часто маємо такі ситуації, коли нам потрібно обрати кілька елементів з певної групи і неважливо, у якому саме порядку їх буде розміщено.





Приклад 10 Із 30 дівчат паралелі десятих класів треба обрати чотирьох для участі в конкурсі «Міс школи». Скілько-ма способами це можна зробити?

Розв'язання

Вибір першої учасниці можна здійснити 30 способами, другої – 29 способами, третьої – 28, четвертої 27. Тоді маємо $30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27$ способів. Користуючись поняттям розміщення, це саме число можна було записати як

$$A_{30}^4 = \frac{30!}{(30 - 4)!}.$$

Ми повинні врахувати, що в групі із чотирьох дівчат неважливо, кого з них обрали першою, кого другою і т. д. Нас цікавить лише склад команди. Тоді отримане число способів треба поділити на кількість перестановок $P_4 = 4!$. Маємо:

$$\frac{30!}{4! \cdot (30 - 4)!}.$$

Відповідь. $\frac{30!}{4! \cdot (30 - 4)!}$.

КОМБІНАЦІЇ (СПОЛУЧЕННЯ)

Зауважимо, що результатом останнього прикладу є кількість способів, якими з 30 елементів можна обрати 4, до того порядок, у якому обрано певну четвірку, нас не цікавить. Таку величину називають *комбінацією (сполученням)* з 30 елементів по чотири і записують як C_{30}^4 .

Аналогічно до міркувань останнього прикладу легко довести таке загальне твердження.

- C_n^m – комбінація (сполучення) з n елементів по m дорівнює $\frac{n!}{m! \cdot (n - m)!}$.

Поняття сполучення іноді значно полегшує розв'язування задачі.

Приклад 11 Скільки різних дільників має число 3510?

Розв'язання

Розкладемо дане число на прості множники:

$$3510 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13.$$



Дільником числа 3510 буде добуток, що містить від одного до п'яти множників з множини {2; 3; 5; 7; 13}. До того врахуємо, що 1 теж є дільником даного числа. Маємо всього дільників

$$1 + C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5 = 1 + 5 + 5 \cdot 2 + 5 \cdot 2 + 5 + 1 = 32.$$

Відповідь. 32.

ВЛАСТИВОСТІ КОМБІНАЦІЙ

I. Зверніть увагу, що в останньому прикладі $C_5^1 = C_5^4$, $C_5^2 = C_5^3$. Легко довести таку загальну формулу

$$C_n^m = C_n^{n-m}.$$

Справді,

$$C_n^{n-m} = \frac{n!}{(n-m)! \cdot (n-(n-m))!} = \frac{n!}{n! \cdot (n-m)!} = C_n^m.$$

Указана властивість спрощує обчислення, зокрема в задачах, аналогічних до прикладу 11, у випадку великої кількості простих множників у розкладі заданого числа.

II. Ще одну властивість комбінацій

$$C_n^{m+1} = \frac{n-m}{m+1} C_n^m$$

доведіть самостійно.

III. Доведемо правильність такого співвідношення

$$C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}.$$

$$\begin{aligned} C_n^m + C_n^{m+1} &= C_n^m + \frac{n-m}{m+1} C_n^m = C_n^m \cdot \frac{n+1}{m+1} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \cdot \frac{n+1}{m+1} = \\ &= C_{n+1}^{m+1}. \end{aligned}$$

Приклад 12 На площині розташовано n точок так, що ніякі три з них не лежать на одній прямій. Скільки прямих можна провести через ці точки?

Розв'язання

Через дві точки можна провести лише одну пряму. Число шуканих прямих дорівнює числу можливих виборів пари точок, до того послідовність їх вибору не має значення. Тоді шукана кількість прямих дорівнює

$$C_n^2 = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}.$$





Відповідь. $\frac{n(n - 1)}{2}$.

Приклад 13 Скільки існує чотирицифрових чисел, у яких дві цифри парні, а дві – непарні?

Розв'язання

Маємо п'ять парних і п'ять непарних цифр. До того треба врахувати, що на першому місці не можна ставити нуль. Тоді маємо такі випадки.

1) Обрати дві різні непарні цифри ми можемо $C_5^2 = 10$ способами.

2) Розглянемо два випадки: серед шуканої пари парних чисел немає нуля, таких варіантів C_4^2 ; серед шуканої пари парних цифр є нуль, таких варіантів C_4^1 .

3) Четвірок цифр, серед яких дві цифри непарні, дві парні й немає нуля, маємо $C_5^2 \cdot C_4^2$. Перестановка цифр у кожній четвірці відповідає різним числам. Таких перестановок маємо $P_4 = 4!$. Отже, чисел шуканого виду буде

$$C_5^2 \cdot C_4^2 \cdot 4! = 10 \cdot 6 \cdot 24 = 1440.$$

4) Четвірок цифр, серед яких дві цифри непарні, нуль і одна парна, відмінна від нуля, маємо $C_5^2 \cdot C_4^1$. Перестановка цифр у кожній четвірці відповідає різним чотирицифровим числам, окрім випадку, коли на першому місці стоїть нуль. Таких перестановок маємо $P_4 - P_3 = 4! - 3!$. Отже, чисел шуканого виду буде

$$C_5^2 \cdot C_4^1 (4! - 3!) = 10 \cdot 4 \cdot (24 - 6) = 720.$$

5) Загалом чотирицифрових чисел, у яких дві цифри парні, а дві – непарні, існує $1440 + 720 = 2160$.

Відповідь. 2160.

З ауваження. Іноді замість того, щоб рахувати шукані варіанти, раціонально обчислити кількість сторонніх варіантів. Наведемо приклад застосування такого способу обчислення.

Приклад 14 Скільки існує шестицифрових чисел, у запису яких є хоча б одна парна цифра?

Розв'язання

Замість того щоб рахувати кількість заданих шестицифрових чисел, визначимо кількість шестицифрових чисел, які





не містять парних цифр. Аналогічно до прикладу 3 їх буде $5^6 = 15\ 625$.

На перше місце не можна поставити цифру 0 – маємо 9 варіантів цифр; у всіх інших розрядах може стояти будь-яка з 10 цифр. Отже, усього шестицифрових чисел маємо: $9 \cdot 10^5 = 900\ 000$. Тому кількість шуканих чисел дорівнює

$$900\ 000 - 15\ 625 = 884\ 375.$$

Відповідь. 884 375.

БІНОМ НЬЮТОНА

У шкільному курсі математики ви вивчали, як подати у вигляді многочлена вирази $(a \pm b)^2$ і $(a \pm b)^3$. Тепер, коли ви розумієтесь на комбінаціях (сполученнях), ознайомимося, як подати вираз $(a \pm b)^n$ у вигляді алгебраїчної суми.

Формула

$$(a + b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^m a^{n-m} b^m + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n$$

дісталася назву *формули бінома Ньютона* на честь видатного фізика й математика Ісаака Ньютона. (Цю формулу ми дозведемо дещо пізніше, у § 8).

Коефіцієнти цього розкладу C_n^m є знайомими нам комбінаціями з n по m . Їх ще називають *біноміальними коефіцієнтами*.

Зрозуміло, якщо у формулі бінома Ньютона b замінити на $-b$, то зміниться знак перед доданками, що містять b у непарному степені:

$$\begin{aligned} (a - b)^n &= C_n^0 a^n - C_n^1 a^{n-1} b + \dots + (-1)^m C_n^m a^{n-m} b^m + \dots + \\ &\quad + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} a b^{n-1} + (-1)^n C_n^n b^n. \end{aligned}$$

Застосуємо формулу бінома Ньютона для доведення такої властивості комбінацій.

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + C_n^6 + \dots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + C_n^7 + \dots = 2^{n-1}.$$

Доведення

За формулою бінома Ньютона

$$(1 + x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + \dots + C_n^m x^m + \dots + C_n^{n-1} x^{n-1} + C_n^n x^n.$$

Звідси при $x = 1$

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^m + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n; \tag{*}$$

при $x = -1$





$$0 = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \dots + C_n^m + \dots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} + (-1)^n C_n^n. \quad (**)$$

Додамо останні дві рівності:

$$2^n = 2C_n^0 + 2C_n^2 + \dots, \quad C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + C_n^6 + \dots = 2^{n-1}.$$

З рівності $(**)$ випливає, що

$$C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + C_n^7 + \dots = C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + C_n^6 + \dots = 2^{n-1}.$$

ІІІ. в. д.

Розглянемо тепер питання: *Скільки існує цілих додатних k-цифрових чисел, цифри яких розміщено в певному порядку?*

Приклад 15 Скільки існує чотирицифрових чисел, у яких кожна наступна цифра більша за попередню?

Розв'язання

Серед цифр такого числа не може бути нуля (бо він мусив би стояти попереду інших цифр). Будь-яка четвірка інших (різних між собою) цифр однозначно задає таке число. Маємо всього

$$C_9^4 = \frac{9!}{4! \cdot (9-4)!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 126.$$

Відповідь. 126.

Приклад 16 Скільки існує чотирицифрових чисел, у яких кожна наступна цифра менша від попередньої?

Розв'язання

Таких чисел стільки само, скільки існує червірок різних цифр, тобто

$$C_{10}^4 = \frac{10!}{4! \cdot (10-4)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 210.$$

Зрозуміло, що так само легко розв'язуються за допомогою комбінацій аналогічні до останніх двох прикладів задачі для чисел з іншою кількістю розрядів. Розв'яжемо для порівняння такі задачі без застосування комбінацій.

Приклад 17 Скільки існує цілих додатних чисел, менших від 100, у яких цифри йдуть у порядку зростання?

Зauważення. Зрозуміло, що цифри двоцифрового числа йдуть у порядку зростання, якщо перша цифра менша від другої. А як бути із цифрами 1, 2, 3, ..., 9? Перетворимо ці



числа на двоцифрові, дописавши попереду нуль: $1 = 01$, $2 = 02$, ..., $9 = 09$ (за таким принципом нумерують білети лотереї). Будемо відносити ці числа до тих, у яких цифри йдуть у порядку зростання.

Розв'язання

СПОСІБ I. Із урахуванням наведеного зауваження шуканих чисел буде стільки, скільки двійок цифр можна утворити, тобто

$$C_{10}^2 = \frac{10!}{2! \cdot (10-2)!} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45.$$

СПОСІБ II. Випишемо такі числа:

01, 02, 03, 04, ..., 09;

12, 13, 14, ..., 19;

23, 24, ..., 29;

.....

89.

Маємо у першому рядку – 9 чисел, у другому – 8, потім: 7, 6, ..., 1. Залишилося лише обчислити суму:

$$9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1.$$

Легше їх додавати так:

$$(9 + 1) + (8 + 2) + (7 + 3) + (6 + 4) + 5 = 45.$$

Відповідь. 45.

Звернемося тепер до трицифрових чисел. Аналогічно тому, як ми це робили у прикладі 17, домовимося перед одноцифровими числами ставити два нулі, а перед двоцифровими – один нуль.

Наприклад: $5 = 005$, $23 = 023$.

Тобто всі додатні цілі одноцифрові та двоцифрові числа у нас будуть трицифровими.

Приклад 18 Скільки існує цілих додатних чисел, менших від 1000, цифри яких ідуть у порядку зростання?

Розв'язання

Наведемо розв'язання без застосування комбінацій.

1) Трицифрові числа, цифри яких розташовані в порядку зростання, – це числа, у яких друга цифра більша за першу, а третя – більша за другу. Тобто у таких числах усі цифри різні.

Розглянемо множину чисел, у яких усі цифри різні. Порівнямо їх на класи: числа, що складаються з одних і тих са-





міх цифр, і числа, що відрізняються лише їхнім порядком. Тоді кожне число належить лише одному класу.

Покажемо, що кожний клас містить рівно шість чисел, серед яких тільки одне складається із цифр у порядку зростання. Нехай a, b, c – три різні цифри і нехай $a > b > c$. Тоді з них можна скласти такі числа: $\overline{abc}, \overline{acb}, \overline{bac}, \overline{bca}, \overline{cab}, \overline{cba}$. Маємо шість чисел, з яких тільки одне число \overline{cba} має цифри у порядку зростання.

Таким чином, якщо маємо N чисел, у яких усі цифри різні, то кількість класів, на які ми їх ділимо, буде дорівнювати $N : 6$. Серед цих чисел кількість чисел, у яких цифри розташовані в порядку зростання, дорівнює кількості класів, тобто дорівнює $N : 6$.

Нам залишилося знайти N , тобто визначити, скільки існує трицифрових чисел з різними цифрами.

1) З прикладу 8 маємо, що кількість двоцифрових чисел, цифри яких різні, дорівнює $45 \cdot 2 = 90$. Якщо дописати спереду цих чисел по одній з 8 цифр, що не міститься в цьому числі, то отримаємо всі трицифрові числа з різними цифрами.

Двоцифрові числа з різними цифрами	Трицифрові числа з різними цифрами
01	201, 301, 401, 501, 601, 701, 801, 901
02	102, 302, 402, 502, 602, 702, 802, 902
...	...
08	108, 208, 308, 408, 508, 608, 708, 908
09	109, 209, 309, 409, 509, 609, 709, 809
10	210, 310, 410, 510, 610, 710, 810, 910
12	012, 312, 412, 512, 612, 712, 812, 912
...	...
18	018, 218, 318, 418, 518, 618, 718, 918
19	019, 219, 319, 419, 519, 619, 719, 819
...	...
97	097, 197, 297, 397, 497, 597, 697, 897
98	098, 198, 298, 398, 498, 598, 698, 798

Таким чином, маємо 90 рядків, у кожному по 8 чисел, тобто всього трицифрових чисел з різними цифрами буде $N = 90 \cdot 8$.

2) Шукана кількість трицифрових чисел, у яких цифри стоять у порядку зростання, дорівнює $N : 6 = (90 \cdot 8) : 6 = 120$.

Відповідь. 120.

А тепер, для порівняння, розв'яжіть останній приклад за допомогою комбінацій.

На закінчення наведемо приклад застосування вміння визначати, скільки існує цілих додатних k -цифрових чисел, цифри яких розміщено у певному порядку.

Приклад 19* На площині позначено 10 точок. Скільки існує відрізків з кінцями у цих точках?

Розв'язання

Пронумеруємо 10 точок цифрами 0, 1, 2, ..., 9. На кінцях відрізка, що сполучає дві із цих точок, стоять різні цифри. Запишемо їх у порядку спадання – маємо двоцифрове число, цифри якого записано у порядку спадання. Наприклад, відрізку, що сполучає точки 2 і 3, відповідає число 32, а відрізку, що сполучає точки 5 і 0, – число 50.

Двом різним відрізкам відповідають різні числа, а різним числам – різні відрізки. Тобто відрізків буде стільки, скільки двоцифрових чисел, цифри яких записано у порядку спадання. Маємо

$$C_{10}^2 = \frac{10!}{2! \cdot (10-2)!} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45.$$

Відповідь. 45.

Зauważення. Можна було у розв'язуванні цієї задачі розглядати двоцифрові числа, цифри яких записано у порядку зростання. До того вважати за двоцифрові й цифри 01, 02, ..., тобто ті, в яких на першому місці стоїть нуль.

ЗАВДАННЯ 5

- Скільки існує двоцифрових чисел, у запису яких:
 - обидві цифри парні;
 - цифра 9 зустрічається рівно один раз?
- Скільки існує трицифрових натуральних чисел, які:
 - записуються лише непарними цифрами;
 - при діленні на 3 дають в остатці 2; в*) записуються цифрами 0, 1, 2, 3, 4, 5 і діляться на 3?
- Обчисліть значення виразу:
 - $10! \cdot 11$;
 - $n! \cdot (n+1)$;
 - $100! : 98!$;
 - $n! : (n-1)!$.
- Доведіть, якщо p – просте число, то $(p-1)!$ не ділиться на p .
- Якою цифрою закінчується сума $1! + 2! + 3! + \dots + 8! + 9!$?
- Доведіть без обчислення, що число $25!$ не є точним квадратом.

7. Скількома способами можна скласти рядок із чотирьох кульок різних кольорів?
8. Скільки існує чотирицифрових чисел, у запису яких використано цифри 2, 5, 7, 9 рівно по одному разу?
9. Дано чотири різні цифри. Скільки можна скласти з них чотирицифрових чисел з різними цифрами?
10. Скільки існує шестицифрових чисел, усі цифри яких мають однакову парність?
11. Скільки існує чотирицифрових чисел, у яких усі цифри різні?
12. На площині маємо 10 точок, жодні три з них не лежать на одній прямій. Скільки існує трикутників з вершинами в цих точках?
13. На полиці маємо 5 книжок. Скількома способами можна розмістити ці книжки у стопки (стопка може містити й одну книжку)?
14. Скількома способами можна поставити на шахову дошку так, щоб вони не били один одного:
- 4 тури;
 - 8 тур;
 - двох слонів різного кольору;
 - двох коней?
15. Скільки існує шестицифрових чисел, які мають хоча б дві однакові цифри?
16. Яких п'ятицифрових чисел більше: тих, у запису яких є 1, чи інших?
17. Скільки різних дільників має число:
- 770;
 - 30 030?
18. Скільки діагоналей має опуклий n -кутник?
19. Скільки шестицифрових чисел, кратних числу 5, можна скласти із цифр 0, 1, 2, ..., 9 за умови, що цифри в запису числа не повторюються?
20. Скільки існує чотирицифрових чисел, у запису яких є хоча б одна парна цифра?
21. Скільки п'ятицифрових чисел можна утворити із цифр 2, 3, 4, 5, 6 (без повторення), у яких непарні цифри не стоять поруч?
- 22*. Яких семицифрових чисел більше: тих, у запису яких є цифра 7, чи тих, у запису яких вона відсутня?
- 23*. Знайдіть кількість перестановок з n елементів за умови, що:
- два певних елементи a і b не стоять поруч;
 - три певних елементи a , b і c стоять поруч;
 - три певних елементи a , b і c не стоять поруч.



- 24***. Скільки існує дев'ятицифрових чисел, що не містять нуля і в яких цифри 2, 5 і 7 не стоять поруч?
- 25***. Скільки існує шестицифрових чисел, у яких три парні та три непарні цифри?
- 26***. Скільки існує десятицифрових чисел, сума цифр яких дорівнює:
а) 2; б) 3; в) 4?
- 27**. Скільки існує семицифрових чисел, цифри яких ідуть у порядку:
а) спадання; б) зростання?
- 28**. Скільки існує двоцифрових чисел, у яких цифри йдуть не в порядку зростання?
- 29***. Скільки існує трицифрових чисел, у яких цифри йдуть не в порядку зростання?
- 30***. Скільки існує трицифрових чисел, у яких перша цифра більша за дві інші, а друга – менша від третьої?
- 31***. Скільки існує цілих додатних чисел, менших від 10 000, цифри яких ідуть у порядку:
а) спадання; б) зростання?
- 32***. Скільки існує цілих додатних чисел, менших від 10^6 , цифри яких ідуть у порядку зростання?
- 33***. Скільки існує цілих додатних чисел, менших від 10^k , цифри яких ідуть у порядку спадання? Відповідь до задачі запишіть у вигляді:
45 чисел при $k = 2$;
120 чисел при $k = 3$;
... чисел при $k = 4$;
... чисел при $k = 5$;
... чисел при $k = 6$;
... чисел при $k = 7$;
... чисел при $k = 8$;
... чисел при $k = 9$;
1 число при $k = 10$;
... чисел при $k = 11$;
... чисел при $k > 11$.
- 34***. Скільки існує k -цифрових чисел, цифри яких ідуть у порядку спадання і в запису яких немає цифри 0?
- 35***. Скільки існує представлень числа 11 у вигляді чотирьох натуральних доданків?



Розділ II

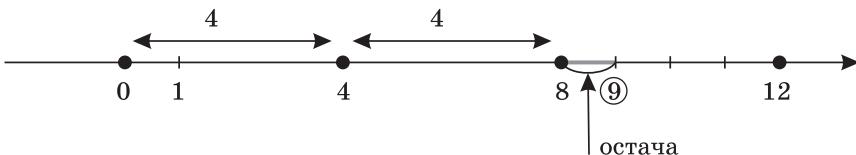
ДІЛЕННЯ З ОСТАЧЕЮ. ПОРІВНЯННЯ

§ 6. Ділення на натуральне число з остаточею

З початкової школи ви умієте виконувати ділення натурального числа з остаточею. Наприклад:

$$9 = 2 \cdot 4 + 1, \quad 9 : 4 = 2 \text{ (ост. 1).}$$

Наведений приклад можна проілюструвати графічно (мал. 3).



Мал. 3

УЗАГАЛЬНЕННЯ ПОНЯТТЯ ДІЛЕННЯ З ОСТАЧЕЮ

Узагальнимо поняття ділення з остаточею на випадок, коли ділене буде довільним цілим числом. Правило ділення цілого числа на натуральне число з остаточею можна представити так.

ДІЛЕНЕ = (НАЙБЛИЖЧЕ ЦІЛЕ ДО ДІЛЕНГОГО ЛІВОРУЧ ВІД НЬОГО, ЩО КРАТНЕ ДІЛЬНИКУ) · (ДІЛЬНИК) + ОСТАЧА

Сформулюємо наведене правило мовою теорії чисел.

Для довільного цілого числа a і довільного натурального числа b існує таке ціле число q , що $a = qb + r$, де остатча r є цілім числом, до того $0 \leq r < b$. Числа q і r визначаються однозначно.

З ауваження. В останньому твердженні: дільник b – додатний, остатча $r \geq 0$, ділене a може бути від'ємним, частка q може бути від'ємною, а може дорівнювати нулю.

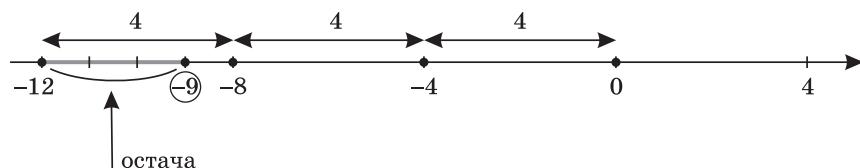
Наприклад, $3 = 0 \cdot 4 + 3$.

Наприклад, $a = -9$, $b = 4$. Найближчим цілим до діленого (ліворуч від нього), кратним числу 4, є число -12 . Тоді

$$-9 = -12 + 3 = (-3) \cdot 4 + 3.$$



Маємо, що остатча від ділення числа -12 на 4 дорівнює 3 – додатне число, менше від 4 . Графічну ілюстрацію цього прикладу наведено на малюнку 4.



Мал. 4

Підкреслимо, що *остата не може бути від'ємним числом і не може перевищувати дільник або дорівнювати йому*. Тобто при діленні a ($a \in Z$) на b ($b \in N$) з остаткою r :

- $0 \leq r < b$;
- *r може набувати b значень: $r \in \{0, 1, 2, \dots, b - 1\}$.*

Наведені майже очевидні факти є найважливішими в теорії чисел, саме на них ґрунтуються доведення великої кількості фактів, розв'язування задач на подільність, у тому числі й підвищеної складності тощо.

Приклад 1 Знайдіть найменше шестицифрове число, яке ділиться на 321 .

Розв'язання

Найменше шестицифрове число $100\ 000$. Поділимо його на 321 :

$$100\ 000 : 321 = 311 \text{ (ост. } 169).$$

П'ятицифрове число, що дорівнює $321 \cdot 311$, є найбільшим п'ятицифровим числом, кратним числу 321 . Наступне після цього число, що ділиться на 321 , дорівнює

$$100\ 000 + (321 - 169) = 100\ 000 + 152 = 100\ 152,$$

є шуканим шестицифровим числом.

Відповідь. $100\ 152$.

Приклад 2 Доведіть, що числа 10^6 і 10^4 мають однакові остатці при діленні на 11 .

Розв'язання

Проаналізуємо різницю заданих чисел:

$$10^6 - 10^4 = (100 - 1)10^4 = 10^4 \cdot 99.$$



Оскільки ця різниця ділиться на 11, то числа 10^6 і 10^4 мають однакові остачі при діленні на 11.

Щ. в. д.

Приклад 3 Чи правильним є таке твердження: якщо a при діленні на 8 дає остачу 3, то при діленні a на 4 також маємо остачу 3?

Розв'язання

За умовою $a = 8p + 3$. Останню рівність можна представити у вигляді $a = 4(2p) + 3$. Отже, при діленні a на 4 маємо остачу 3.

Відповідь. Так.

Приклад 4 Чи може число ділитися на 8, а при діленні на 12 давати остачу 10?

Розв'язання

Нехай a ділиться на 8, тобто $a = 8x$. Якщо a при діленні на 12 дає остачу 10, то $a = 12y + 10$. Маємо лінійне діофантове рівняння $4x - 6y = 5$, у якого коефіцієнти перед змінними мають спільний множник. Отже, це рівняння не має розв'язків (див. с. 44).

Відповідь. Ні.

Приклад 5 Доведіть, що для довільних цілих чисел a і b вираз $ab(a^2 - b^2)$ ділиться на 6.

Розв'язання

1) Доведемо, що $ab(a^2 - b^2)$ ділиться на 2.

Якщо одне із чисел a або b парне, то $ab(a^2 - b^2)$ ділиться на 2. Якщо a і b непарні, то $a \pm b$ парні й $ab(a^2 - b^2)$ ділиться на 2.

2) Доведемо, що $ab(a^2 - b^2)$ ділиться на 3.

Якщо одне із чисел a або b ділиться на 3, то $ab(a^2 - b^2)$ ділиться на 3. Якщо a і b не діляться на 3, то кожне із цих чисел при діленні на 3 дає остачу або 1, або 2. Тоді можливі такі випадки.

- Остачі однакові, $a - b$ ділиться на 3.

- Остачі різні, їх сума дорівнює 3 і $a + b$ ділиться на 3.

Отже, задане число ділиться на 2 і на 3, тобто воно ділиться на $2 \cdot 3 = 6$.

Щ. в. д.

Приклад 6 Яку остачу при діленні на $n + 1$ дає число $n^2 + 3n + 5$, якщо n – натуральне?





Розв'язання

Поділимо $n^2 + 3n + 5$ на $n + 1$ у стовпчик (див. с. 54), маємо

$$n^2 + 3n + 5 = (n + 1)(n + 2) + 3.$$

З цього запису випливає:

- якщо $n + 1 > 3$ (при $n > 2$), то остатча дорівнює 3;
- якщо $n + 1 = 3$ (при $n = 2$), то остатча дорівнює 0;
- якщо $n + 1 = 2$ (при $n = 1$), то остатча дорівнює 1, оскільки $3 = 2 \cdot 1 + 1$;
- якщо $n + 1 = 1$ (при $n = 0$) – бути не може, бо n – натуральне.

Відповідь. 1 – при $n = 1$; 0 – при $n = 2$; 3 – при $n > 2$.

Приклад 7 Є три купки, що складено з 2014, 214 і 14 камінців відповідно. Одним ходом можна або забрати з кожної купки одну й ту саму кількість камінців (від ходу до ходу ця кількість може змінюватися), або половину камінців з будь-якої купки (якщо їх кількість парна) перекласти до іншої купки. Чи можна таким чином домогтися того, щоб не залишилося жодного камінця у кожній купці?

Розв'язання

Після кожного ходу остатча від ділення загальної кількості камінців на 3 не змінюється. Але початкова сума $2014 + 214 + 14$ не ділиться на 3. Тому не вдається домогтися того, щоб не залишилося жодного камінця.

Відповідь. Ні.

Приклад 8* Двоє по черзі викреслюють числа від 1 до 27, поки не залишиться два числа. Якщо їхня сума ділиться на 5, то виграс перший, якщо ні – то другий. Хто виграє за правильної стратегії гри?

Розв'язання

Числа при діленні на 5 дають остачі 0, 1, 2, 3, 4. Сума двох чисел буде кратна числу 5, якщо сума остач цих чисел при діленні на 5 дорівнює 5.

Кожному даному числу поставимо у відповідність його остатчу від ділення на 5 і умовно утворимо пари остач: 1 і 4; 2 і 3. У нас залишаться п'ять чисел з остаточею 0 і пара чисел з остатчами 1 і 2.

Перший гравець виграє, якщо першим ходом викреслити 5, потім буде дотримуватися відповідності вказаним раніше параметрам. До того остатчу 0 треба не більше ніж по одному разу «поєднати в пари» з остачами 1, 2.

Відповідь. Перший гравець.





ПРО ПРОСТИ ЧИСЛА ТА ЇХ КІЛЬКІСТЬ

Ми вже працювали з простими числами у § 1. Нагадаємо їх означення.

Прості числа – це більші за 1 натуральні числа, які не можна розкласти на два множники (одиниця не належить до простих чисел).

Поняття простого числа було відомо ще стародавнім. Так, славнозвісний Евклід досліджував це питання і використовував при цьому властивості ділення з остачею. Розглянемо слідом за Евклідом питання про загальну кількість простих чисел.

Серед простих чисел тільки одне парне – 2, усі інші – непарні.

Ось кілька перших простих чисел: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41... Таблицю простих чисел, що не перевищують 6000, наведено в додатку (див. с. 118). А чи має цей ряд кінець? Саме таке питання поставив у IX книзі «Основи» Евклід. І там само він дає відповідь на це питання: «За кожним простим числом можна вказати ще одне, більше просте число», тобто ряд простих чисел нескінчений. Розглянемо слідом за Евклідом доведення цього твердження.

Якщо простих чисел скінчена кількість і p – найбільше з них, то число $N = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot p + 1$, що на 1 перевищує добуток всіх простих чисел, – не просте (бо воно більше за p). Тому це число повинно ділитися на одне з простих чисел. Але це не так, бо остача від ділення N на довільне з простих чисел дорівнює 1. Маємо протиріччя, яке доводить, що простих чисел нескінчена кількість.

Приклад 9 Доведіть, що якщо чотирицифрове число p не ділиться на жодне з простих чисел від 2 до 97, то p – просте число.

Розв'язання

Нехай число p – непросте. Наступне після 97 просте число 101. Тоді $p = mn$, де кожний з множників m і n не менший від 101. Тоді $p \geq 101^2 = 10\,201$, тобто p – не може бути чотирицифровим. Маємо протиріччя. Отже, p – просте число.

Щ. в. д.

Властивості ділення з остачею часто є ключем до розв'язування задач на множині цілих чисел, особливо якщо в умові задіяно поняття простого числа.



Іноді при розв'язуванні таких задач треба просто перебрати всі можливі остачі від ділення заданих чисел на якесь конкретне число, наприклад на 3.

Приклад 10 Відомо, що p , $p + 10$, $p + 14$ – прості числа. Знайдіть число p .

Розв'язання

1) При діленні числа p на 3 можливі остачі: 0, 1, 2, тобто або $p = 3k$, або $p = 3k + 1$, або $p = 3k - 1$. За умовою число p – просте.

2) Якщо $p = 3k + 1$, то $p + 14 = 3k + 15$ і ділиться на 3, чого бути не може.

3) Якщо $p = 3k - 1$, то $p + 10 = 3k - 9$ і ділиться на 3, чого бути не може.

4) Отже, $p = 3k$, притому $k = 1$.

Відповідь. $p = 3$.

ПРО СТЕПІНЬ ЧИСЛА І ОСТАЧІ

Остачі при діленні на 3 чи 4 зручно застосовувати при розв'язуванні задач, що містять квадрати натуральних чисел. Тоді спираємося на таку лему (*лема – допоміжна невелика теорема*).

Лема 1. Квадрат числа при діленні на 3 та 4 дає остачу 0 або 1.

Щоб довести це твердження, достатньо представити довільне натуральне число у вигляді $\{3k, 3k \pm 1\}$ та $\{2k, 2k + 1\}$ відповідно і розглянути можливі випадки.

Зauważення. Квадрат парного числа ділиться на 4 без остачі, а квадрат непарного при діленні на 4 дає остачу 1.

Приклад 11 У запису n -цифрового числа маємо по одній цифрі 1, 3, 5, 8, а всі інші цифри – нулі. Чи може таке число бути точним квадратом?

Розв'язання

Сума цифр даного числа дорівнює 17 і при діленні на 3 дає остачу 2. Як відомо, число при діленні на 3 дає таку саму остачу, як і сума його цифр (див. доведення ознаки подільності на 3 у § 2, с. 32). Тобто дане число при діленні на 3 дає остачу 2 і за лемою 1 не може бути точним квадратом.

Відповідь. Ні.

Приклад 12 Доведіть, що число виду $4a + 3$ не можна представити у вигляді суми двох квадратів.





Розв'язання

При діленні числа $4a + 3$ на 4 в остачі маємо 3. Нехай задане число можна представити у вигляді суми двох квадратів. За лемою 1 при діленні суми двох квадратів на 4 отримаємо остачу або 0, або 1, або 2 (а не 3). Маємо протиріччя – задане число не можна представити у вигляді суми двох квадратів.

Щ. в. д.

Приклад 13 Знайдіть усі прості числа p , щоб число $8p^2 + 1$ було теж простим.

Розв'язання

Розглянемо остачі r від ділення числа p^2 на 3. За лемою 1 маємо два випадки.

- 1) $r = 0$. Це можливо лише у випадку $p = 3$ (p – просте). Тоді $8p^2 + 1 = 73$ – число просте.
- 2) $r = 1$. Тоді число $8p^2 + 1$ кратне числу 3 і не може бути простим.

Відповідь. $p = 3$.

Приклад 14 Розв'яжіть у цілих числах рівняння

$$18x^2 - 98y^2 = 2011.$$

Розв'язання

Перепишемо задане рівняння у вигляді

$$20x^2 - 96y^2 - 2008 = 2x^2 + 2y^2 + 3.$$

Ліва частина останньої рівності кратна числу 4, а права (за лемою 1) не може ділитися на 4.

Відповідь. Рівняння розв'язків не має.

Наведемо ще кілька корисних лем. (Усі вони доводяться дуже легко, пропонуємо зробити це самостійно.)

Лема 2. Квадрат числа при діленні на 5 дає остачі $\{0, 1, 4\}$.

Лема 3. Квадрат числа при діленні на 7 дає остачі $\{0, 1, 4, 2\}$.

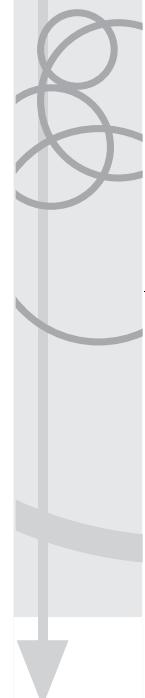
Лема 4. Квадрат числа при діленні на 8 дає остачі $\{0, 1, 4\}$.

Лема 5. Куб числа при діленні на 7 дає остачі $\{0, 1, 6\}$.

Лема 6. Куб числа при діленні на 9 дає остачі $\{0, 1, 8\}$.

Лема 7. Четвертий степінь числа при діленні на 5 дає остачі $\{0, 1\}$.

Лема 8. Шостий степінь числа при діленні на 7 дає остачі $\{0, 1\}$.





Приклад 15 Доведіть, що число $6n^3 + 3$ не може бути шостим степенем цілого числа при жодному натуральному n .

Розв'язання

(Лема 5) Число $6n^3 + 3$ при діленні на 7 може давати остачі 3, 2 або 4, а шостий степінь при діленні на 7 може давати остачі 0 або 1 (лема 7). Рівність між ними неможлива.

Щ. в. д.

Приклад 16 Розв'яжіть у цілих числах рівняння $x^2 - 7y = 10$.

Розв'язання

Представимо дане рівняння у вигляді $x^2 + 4 = 7(y + 2)$.

Звідси число $x^2 + 4$ кратне числу 7, отже, x^2 при діленні на 7 має давати остачу 3, що неможливо (лема 3).

Відповідь. Розв'язків немає.

Приклад 17 Доведіть, що ніяке число виду $8n + 7$ не можна записати у вигляді суми квадратів трьох цілих чисел.

Розв'язання

За лемою 4 квадрат числа при діленні на 8 може давати остачі 0, 1 або 4. Отже, сума трьох квадратів при діленні на 8 не може давати 7.

Щ. в. д.

АЛГОРИТМ ЕВКЛІДА

У § 1 ми обговорювали поняття найбільшого спільного дільника двох натуральних чисел (НСД). Щоб його знайти, достатньо записати розклад даних чисел на прості множники (у порядку зростання) й взяти їх спільну частину (с. 10). Проте для більшості чисел така процедура дуже громіздка і практично неможлива. Спробуйте, наприклад, таким способом знайти НСД чисел 1 381 955 і 690 713. Проте існує алгоритм Евкліда, що допомагає легко розв'язувати такі задачі.

Алгоритм Евкліда. Найбільший спільний дільник чисел a і b ($a > b$) дорівнює найбільшому спільному дільнику числа b та остачі від ділення a на b .

Наприклад, НСД (368; 161) = НСД (161; 46) = НСД (46; 23) = 23.

Правильність цього твердження легко довести, спираючись на властивості чисел 1–3 (§ 1, с. 6) і поняття остачі.





Справді, нехай $a = qb + r$. Кожен спільний дільник чисел a і b є дільником числа $a - b$. Отже, множина спільних дільників чисел a , b і $a - b$ збігається, тоді збігаються і їхні найбільші елементи, тобто НСД $(a; b) = \text{НСД} (a - b; b)$.

Якщо повторити вказаний крок q разів, отримаємо НСД $(qb + r; b) = \text{НСД} (r; b)$, тобто правильність алгоритму Евкліда.

Приклад 18 Знайдіть НСД $(1\ 381\ 955; 690\ 713)$.

Розв'язання

Позначимо шукане число як A і скористаємося алгоритмом Евкліда.

- 1) $1\ 381\ 955 : 690\ 713 = 2$ (ост. 529), $A = \text{НСД} (690\ 713; 529)$;
- 2) $690\ 713 : 529 = 1305$ (ост. 368), $A = \text{НСД} (529; 368)$;
- 3) $529 : 368 = 1$ (ост. 161), $A = \text{НСД} (368; 161)$;
- 4) $368 : 161 = 2$ (ост. 46), $A = \text{НСД} (161; 46)$;
- 5) $161 : 46 = 3$ (ост. 23), $A = \text{НСД} (46; 23) = 23$.

Відповідь. 23.

Приклад 19 Доведіть, що дріб $\frac{12n+1}{30n+2}$ нескоротний для всіх $n \in N$.

Розв'язання

Скористаємося алгоритмом Евкліда:

$$\text{НСД} (30n+2; 12n+1) = \text{НСД} (12n+1; 6n) = \text{НСД} (6n; 1) = 1.$$

Щ. в. д.

ЗАВДАННЯ 6

1. Яку остачу маємо при діленні:
а) 1005 на 13; б) 1001 на 11; в) 1111 на 37;
г) -150 на 19; д) $-54\ 321$ на 4?
2. Доведіть, що числа мають однакові остачі при діленні на 11:
а) 10^4 і 10^6 ; б) 10^5 і -1 .
3. Яке найбільше із чисел, менших від 2012, при діленні на 11 дає остачу 8?
4. Знайдіть найбільше чотирицифрове число, що ділиться на 29.
5. В одному з під'їздів восьмиповерхового будинку на першому поверсі знаходяться квартири від № 97 до № 102. На якому поверсі і в якому (за номером) під'їзді знаходиться квартира № 178, якщо на всіх поверхах у всіх під'їздах однаакова кількість квартир?



- 6***. Було 7 аркушів паперу. Деякі із цих аркушів розрізають на 7 частин кожний. Після того деякі з утворених паперів знову розрізають на 7 частин і так роблять кілька разів. Чи можна отримати в результаті такого розрізання 2012 частин?
- 7.** Яку остачу (для кожного $n \in N$) маємо при діленні:
- a) $2n + 5$ на $2n + 3$; б) $4n + 7$ на $2n + 1$;
 - в) $2n^2 + 5n - 3$ на $n + 4$; г) $n^2 + 1$ на 4?
- 8***. На столі лежать книжки. Якщо їх спакувати по 4, по 5 або по 6 книжок у пачку, то кожного разу залишиться одна книжка, а якщо спакувати по 7 книжок у пачку, то залішки книжок не залишиться. Яка найменша кількість книжок може бути на столі?
- 9.** Чи правильним є твердження:
- а) якщо a при діленні на 4 дає остачу 3, то при діленні a на 2 також маємо остачу 3;
 - б) якщо a при діленні на 4 дає остачу 3, то при діленні a на 8 також маємо остачу 3;
 - в) якщо a при діленні на 15 дає остачу 7, то при діленні на 5 воно не може мати остачу 3;
 - г) якщо a при діленні на 15 дає остачу 3, то при діленні на 9 воно може мати остачу 6?
- 10.** Чи може квадратне рівняння $ax^2 + bx + c$ із цілими коефіцієнтами мати дискримінант, що дорівнює 23?
- 11.** Доведіть, що квадрат довільного непарного числа і число 9 мають однакові остачі при діленні на 8.
- 12.** Доведіть, що довільне натуральне число і куб цього числа мають однакові остачі при діленні на 6.
- 13.** Доведіть, що натуральні числа $11n$ і n^3 при діленні на 6 дають однакові остачі.
- 14.** Знайдіть усі значення натурального числа n , при яких $n^2 + 9n + 14$ ділиться на $n + 5$ без остачі.
- 15.** Відомо, що числа n і 6 – взаємно прості. Доведіть, що число n^2 при діленні на 24 дає остачу 1.
- 16.** Доведіть, якщо сума квадратів двох цілих чисел ділиться на 7, то кожне із цих чисел кратне числу 7.
- 17***. Знайдіть усі прості числа p , для яких число $p^2 + 2$ теж буде простим.
- 18***. Знайдіть таке просте число p , щоб число $6p^2 + 1$ теж було простим.
- 19***. Числа p , $2p + 1$, $4p + 1$ – прості. Знайдіть p .



- 20*. Знайдіть усі значення n , при яких числа n , $n + 21$, $n + 29$ будуть простими.
21. Доведіть, що не існує натуральних чисел a і b таких, що $a^2 - 3b^2 = 8$.
22. Доведіть, що не існує натурального числа n , для якого $n^3 + 2$ ділиться на 9.
23. Доведіть, що $n^5 + 4n$ ділиться на 5 при довільному значенні натурального числа n .
24. Чи може сума цифр точного квадрата дорівнювати 2012?
25. У дванадцятицифровому числі цифри 2 і 9 зустрічаються двічі, а всі інші цифри – по одному разу. Чи може таке число бути точним квадратом?
- 26*. Які з трьох простих чисел 1073, 1979 і 1987 можна представити у вигляді суми двох квадратів? Знайдіть таке представлення.
- 27*. Доведіть, що якщо p і $p^2 + 2$ – прості числа і $p > 2$, то $p^3 + 2$ теж просте число.
- 28*. Доведіть, що квадрат будь-якого простого числа $p > 3$ при діленні на 12 дає в остачі 1.
- 29*. Двоє грають у гру. Перший називає довільне число від 1 до 5. Потім другий додає до цього числа довільне ціле число від 1 до 5. Після цього перший до отриманої суми додає знову довільне число від 1 до 5 і т. д. Виграє той, хто першим отримає число 50. Хто виграє за правильної стратегії гри: той, хто починає, чи його супротивник? Якою повинна бути правильна стратегія?
- 30*. Розв'яжіть попередню задачу за умови, що треба отримати число n .
31. Знайдіть НСД (16 484; 42 282).
32. Доведіть, що при всіх $n \in N$, дріб $\frac{21n+4}{14n+3}$ є нескоротним.
- 33*. Доведіть, що $\text{НСД}(2^n - 1; 2^m - 1) = 2^{\text{НСД}(m; n)}$.
- 34*. Доведіть, що числа $2^m - 1$ і $2^n - 1$ взаємно прості тоді й тільки тоді, коли числа n і m є взаємно простими.

§ 7*. Арифметика остач за модулем

У цьому параграфі ми розглянемо арифметику остач від ділення на число m (кажуть: за модулем m), що є природним продовженням і узагальненням матеріалу попереднього параграфа.



Той, хто опрацює пропонований матеріал, зможе розв'язувати значно ширший спектр задач на подільність і її використання, лаконічно записувати розв'язання таких завдань.

Для того, хто засвоїть пропоновану далі математичну мову, розв'язування задач підвищеної складності буде значно легшим, ніж розв'язування традиційних задач попереднього параграфа.

ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ

З означення ділення з остачею (див. § 6, с. 75) випливає, що остачею від ділення довільного цілого числа на натуральне число n , є невід'ємне ціле число, що не перевищує $n - 1$.

Числа a , $a + n$, $a + 2n$, ..., $a + kn$, де $n \in \mathbb{Z}$, мають однакові остачі при діленні на n . Тобто кожній остачі при діленні на конкретне число n відповідає певна множина чисел (зрозуміло, що їх нескінченно багато).

Запишемо, наприклад, остачі від ділення на 7 чисел $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ у вигляді таблиці. У стовпчик під значенням остачі випишемо числа, що їй відповідають.

Таблиця 1

Номер рядка k	Остача від ділення на 7						
	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	7	8	9	10	11	12	13
2	14	15	16	17	18	19	20
3	21	22	23	24	25	26	27
4	28	29	30	31	32	33	34
5	35	36	37	38	39	40	41
...
k	$7k$	$7k + 1$	$7k + 2$	$7k + 3$	$7k + 4$	$7k + 5$	$7k + 6$
...

Усі числа першого стовпчика діляться на 7 без остачі (тобто остача дорівнює 0). Їх можна записати у вигляді $7k$, де k – номер рядка.

Якщо до кожного числа першого стовпчика додати 1, то отримаємо $7k + 1$ – числа другого стовпчика, які при діленні на 7 дають остачу 1.

Аналогічно, третій стовпчик визначається формулою $7k + 2$, четвертий – $7k + 3$, п'ятий – $7k + 4$, шостий – $7k + 5$,



останній $7k + 6$. Отже, рядок з довільним номером k має вигляд:

$$7k, 7k + 1, 7k + 2, 7k + 3, 7k + 4, 7k + 5, 7k + 6.$$

Отже, усі числа першого стовпчика дають при діленні на 7 остаточу 0, другого – 1, третього – 2, четвертого – 3, п’ятого – 4, шостого – 5, сьомого – 6.

Тепер розширимо таблицю від’ємними числами у рядках з від’ємними номерами.

Таблиця 2

Номер рядка k	Остача від ділення на 7						
	0	1	2	3	4	5	6
$k < 0$	$7k$	$7k + 1$	$7k + 2$	$7k + 3$	$7k + 4$	$7k + 5$	$7k + 6$
...
-3	-21	-20	-19	-18	-17	-16	-15
-2	-14	-13	-12	-11	-10	-9	-8
-1	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1
0	0	1	2	3	4	5	6
1	7	8	9	10	11	12	13
2	14	15	16	17	18	19	20
3	21	22	23	24	25	26	27
...

Маємо, що всі цілі числа можна поділити на 7 класів – стовпчиків таблиці 2. Будемо позначати ці класи за їх остаточею при діленні на 7: $K_0, K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6$. Тобто характеристикою кожного із цих класів K_r є одна і та сама остача r при діленні на 7.

Узагальненням поняття остачі є поняття класів цілих чисел K_r у випадку натурального числа n , де $r \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.

Зафіксуємо таке натуральне число n , яке далі будемо називати **модулем**. Для кожного $r \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ визначимо **клас K_r** як множину всіх цілих чисел, що дають одну й ту саму остачу r при діленні на число n .

Тоді для модуля n усі цілі числа розподіляться по класах: K_0, K_1, \dots, K_{n-1} . Ці класи прийнято називати **класами лишків за модулем n** .

Будемо казати, що **цилі числа a і b порівнювані за модулем n , якщо a і b належать одному класу лишків за цим**



модулем (мають однакову остачу при діленні на натуральне число n). Записують це так: $a \equiv b \pmod{n}$ або $a \stackrel{n}{\equiv} b$, і такий запис називають **порівнянням**.

Якщо числа a і b мають різні остачі при діленні на n , то це записують як $a \not\equiv b \pmod{n}$ або $a \not\equiv b$.

Наприклад, $14 \equiv 0 \pmod{7}$, бо числа 14 і 0 діляться на 7 з однаковою остачею 0. Тобто числа 14 і 0 порівнювані за модулем 7.

Числа 15 і 14 не порівнювані за модулем 7, тобто $15 \not\equiv 14 \pmod{7}$, бо їхні остачі від ділення на 7 різні (відповідно 1 і 0).

Зауважимо очевидні факти, які часто є ключем до розв'язання задач.

- Числа a і $a \pm kb$ ($b \in N$, $k \in Z$) мають однакові остачі при діленні на b . Тобто $a \stackrel{b}{\equiv} a \pm kb$.

Наприклад: $16 \stackrel{5}{\equiv} 16 - 3 \cdot 5 = 1 \stackrel{5}{\equiv} 16 + 4 \cdot 5$.

- Якщо $a \stackrel{b}{\equiv} c$, то $a \stackrel{b}{\equiv} c - b$.

Наприклад: $17 \stackrel{5}{\equiv} 2 \stackrel{5}{\equiv} 2 - 5 = -3$.

- Якщо з двох чисел a і b , що порівнюються за модулем n , одне, наприклад b , є невід'ємним числом, меншим від n , то число b є остачею від ділення a на n . Тобто $a = k \cdot n + b$, де $k \in Z$, $0 \leq b < n$, b – остача.

Наприклад, якщо $10 \stackrel{3}{\equiv} 1$, то 1 – остача від ділення 10 на 3: $10 = 3 \cdot 3 + 1$.

- Остача не може бути від'ємною.
- Однакові остачі при діленні на натуральне число мають не тільки натуральні числа.

Приклад 1 Знайдіть усі числа n , які за модулем 3 порівнювані із числом 10.

Розв'язання

Маємо $n \stackrel{3}{\equiv} 10 \stackrel{3}{\equiv} 1$, $1 \in [0; 3)$. Отже, $n = 3k + 1$, де $k \in Z$.

Відповідь. $n = 3k + 1$, де $k \in Z$.

Як ми бачили в попередньому параграфі, властивості остач використовують при розв'язуванні різноманітних задач. Сформулюємо ці властивості мовою порівнянь.





ВЛАСТИВОСТІ ПОРІВНЯНЬ

Усі властивості порівнянь, що ми наведемо далі, легко довести, спираючися на властивості подільності, які було розглянуто у § 1, та властивості остач, з якими ми працювали у попередньому параграфі.

1. Якщо $a \equiv^n b$, то $a - b \equiv^n 0$, тобто якщо числа a і b мають однакові остачі при діленні на n , то різниця $a - b$ ділиться на n без остачі. Правильним є і обернене твердження. Тобто

$$a \equiv^n b \Leftrightarrow a - b \equiv^n 0.$$

Наведемо приклад використання цієї властивості.

Приклад 2 Доведіть для довільного натурального числа n :

$$n^2 \equiv^{n+1} 1.$$

Розв'язання

$$n^2 - 1 = (n + 1)(n - 1) : (n + 1), \text{ тоді } n^2 - 1 \equiv^{n+1} 0 \text{ і } n^2 \equiv^{n+1} 1.$$

Щ. в. д.

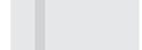
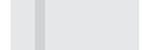
2. Якщо $a \equiv^n b$ і $b \equiv^n c$, то $a \equiv^n c$.
3. (Додавання порівнянь.) Якщо $a \equiv^n b$ і $c \equiv^n d$, то $a + c \equiv^n b + d$, $a - c \equiv^n b - d$. Порівняння за одним і тим самим модулем можна додавати і віднімати.
4. Наслідок. Якщо $a \equiv^n b$, то $a + c \equiv^n b + c$ і $a - c \equiv^n b - c$. До обох частин порівняння можна додати (відняти) одне й те саме число.
5. (Добуток порівнянь.) Якщо $a \equiv^n b$ і $c \equiv^n d$, то $a \cdot c \equiv^n b \cdot d$.
6. Наслідок. Обидві частини порівняння можна множити на одне й те саме число:

$$\text{якщо } a \equiv^n b, \text{ то } a \cdot c \equiv^n b \cdot c.$$

7. Наслідок. Обидві частини порівняння можна підносити до одного й того самого степеня:

$$\text{якщо } a \equiv^n b, \text{ то } a^m \equiv^n b^m.$$

З ауваження. Твердження (7) є правильним для піднесення до степеня, але його не можна застосовувати для знаходження кореня числа (обернене до (7)).





- Аналізуючи порівняння за модулем n будь-якого алгебраїчного виразу, отриманого для цілих чисел за допомогою дій додавання, віднімання і множення, можна замінювати ці числа на числа, порівнювані їм за модулем n , – результат не зміниться.

Приклад 3 Знайдіть остаточу від ділення 6^{100} на 7.

Розв'язання

Скористаємося тим, що $6 \equiv -1$. Після піднесення порівняння до степеня 100 маємо: $6^{100} \equiv (-1)^{100}$, тобто $6^{100} \equiv 1$.

Відповідь. 1.

Приклад 4 Доведіть, що число $13^{16} - 2^{19} \cdot 5^{93}$ ділиться на 3.

Розв'язання

Число $13 - 1$ ділиться на 3. Тоді $13 \equiv 1$ і $13^{16} \equiv 1$ (за властивістю 6).

Аналогічно: $2 \equiv -1$, $5 \equiv -1$ і $2^{19} \equiv (-1)^{19} \equiv -1$, $(5)^{93} \equiv (-1)^{93} \equiv -1$.
Тоді $2^{19} \cdot 5^{93} \equiv 1$ і $13^{16} - 2^{19} \cdot 5^{93} \equiv 0$.

Щ. в. д.

А тепер спробуйте довести те саме без порівняння!

Приклад 5 Знайдіть остаточі від ділення на 3 чисел $2n^2 + 1$, де $n \in N$.

Розв'язання

1) Нехай $n \equiv 3$, тоді $n^2 \equiv 0$, $2n^2 \equiv 0$, $2n^2 + 1 \equiv 1$.

2) Нехай $(n-1) \equiv 3$ або $(n+1) \equiv 3$. Тоді $n-1 \equiv 0$ або $n+1 \equiv 0$,
 $n \equiv 1$ або $n \equiv -1$ і $n^2 \equiv 1$.

Маємо: $2n^2 \equiv 2$, $2n^2 + 1 \equiv 3 \equiv 0$.

Відповідь. Остатча від ділення на 3 числа $2n^2 + 1$, де $n \in N$, дорівнює 1, якщо n кратне 3, і дорівнює 0, якщо n не кратне 3.

Приклад 6 Знайдіть усі прості числа p , для яких $2p^2 + 1$ є простим числом.

Розв'язання

З прикладу 5 маємо, що при всіх $p \neq 3$ числа $2p^2 + 1$ кратні числу 3 і не можуть бути простими.





При $p = 3$ маємо $2p^2 + 1 = 19$ – просте число.

Відповідь. $p = 3$.

Приклад 7 Чи існує таке натуральне число n , що

$$n^2 = 2011^{2011} + 2005^{2005}?$$

Розв'язання

Числа 2010 і 2004 кратні числу 3. Тоді $2011 \equiv 1$ і $2005 \equiv 1$. Звідси $2011^{2011} \equiv 1$ і $2005^{2005} \equiv 1$, $2011^{2011} + 2005^{2005} \equiv 2$, але порівнювання квадрата числа за модулем 3 не може дорівнювати 2 (не може при діленні на 3 мати остаточу 2, див. лему 1 у § 6, с. 80).

Відповідь. $n \in \emptyset$.

Сформулюємо леми, наведені у § 6, мовою порівнянь.

Лема 1. Квадрат числа за модулем 3 (за модулем 4) порівнюваний з одним із чисел $\{0; 1\}$.

Лема 2. Квадрат числа порівнюваний за модулем 7 з одним із чисел $\{0, 1, 2, -3\}$.

Лема 3. Квадрат числа порівнюваний за модулем 5 з одним із чисел $\{0, 1, -1\}$.

Лема 4. Квадрат числа порівнюваний за модулем 8 з одним із чисел $\{0, 1, 4\}$.

Лема 5. Куб числа порівнюваний за модулем 7 з одним із чисел $\{0, 1, -1\}$.

Лема 6. Куб числа порівнюваний за модулем 9 з одним із чисел $\{0, 1, -1\}$.

Лема 7. Четвертий степінь числа порівнюваний за модулем 5 з одним із чисел $\{0, 1\}$.

Лема 8. Шостий степінь числа порівнюваний за модулем 8 з одним із чисел $\{0, 1\}$.

Приклад 8 Чи може бути повним квадратом число $7^m + 7^n$, де m і n цілі невід'ємні числа?

Розв'язання

Скористаємося тим, що $7^k \equiv 1^k$. Тоді $7^m + 7^n \equiv 1^m + 1^n = 2$. Але квадрат числа за модулем 3 не може бути порівнюваний з 2 (за лемою 1).

Відповідь. Ні.





Приклад 9 При яких натуральних n число $8n + 3$ ділиться на 13?

Розв'язання

Нехай $8n + 3 \stackrel{13}{\equiv} 0$. Тоді $8n \stackrel{13}{\equiv} -3$, $8 \cdot 8n \stackrel{13}{\equiv} -24$. Врахуємо, що $65 = 13 \cdot 5$. Тоді: $65n \stackrel{13}{\equiv} 0$, $-n \stackrel{13}{\equiv} -24 \stackrel{13}{\equiv} -11$ і $n \stackrel{13}{\equiv} 11$. Маємо $n = 13m + 11$.

Відповідь. $n = 13m + 11$.

Зауваження. Зверніть увагу, що у прикладі 9 ми розв'язали порівняння $8n \stackrel{13}{\equiv} -3$ простим підбором зручного множника.

Приклад 10 Чи можна число $\underbrace{11\dots1}_{2015}$ записати у вигляді суми трьох квадратів?

Розв'язання

$\underbrace{11\dots1}_{2015} \stackrel{8}{\equiv} 111$, бо $1000 : 8$. Маємо $111 \stackrel{8}{\equiv} 7$ (бо $104 : 8$) і залемою 4 задане число не можна представити у вигляді суми трьох квадратів.

Відповідь. Ні.

Приклад 11* Знайдіть остаточу від ділення числа $N = (1^2 + 1)(2^2 + 1)(3^2 + 1)\dots(1000^2 + 1)$ на 3.

Розв'язання

Серед перших 1000 натуральних чисел маємо 334 числа, порівнюваних за модулем 3 з 1; 333 числа, порівнюваних за модулем 3 з 2; 333 числа, порівнюваних за модулем 3 з 3. До того врахуємо, що $2^2 + 1 \stackrel{3}{\equiv} 2$, $3^2 + 1 \stackrel{3}{\equiv} 1$. Тоді маємо

$$N \stackrel{3}{\equiv} (1^2 + 1)^{334} \cdot (2^2 + 1)^{333} \cdot (3^2 + 1)^{333} \stackrel{3}{\equiv} 2^{334} \cdot 2^{333} \cdot 1^{333} \stackrel{3}{\equiv} 2^{667} \stackrel{3}{\equiv} 2 \cdot (2^2)^{333} \stackrel{3}{\equiv} 2 \cdot 1^{333} \stackrel{3}{\equiv} 2.$$

Відповідь. 2.

Доведемо ще одну важливу властивість стосовно ділення порівнянь.





8. Якщо $ka \equiv kb$, де k і n – взаємно прості числа, то $a \equiv b$.

Доведення

Оскільки $ka \equiv kb$, то $ka - kb \equiv 0$, $k(a - b) \vdots n$. Тоді, враховуючи, що k і n – взаємно прості числа, маємо $(a - b) \vdots n$, тобто $a \equiv b$.

ІІІ. в. д.

Наприклад:

$$1) 3 \cdot 5^2 \equiv 3 \cdot 7, 5^2 \equiv 7; \quad 2) 5 \cdot 3^{10} \equiv 5 \cdot 7, \text{ але } 3^{10} \not\equiv 7.$$

Проте правильним буде таке твердження (доведіть його самостійно).

9. Якщо $ka \equiv kb$, то $a \equiv b$.

Наприклад, $5 \cdot 3^{10} \equiv 5 \cdot 7, 3^2 \equiv 7$.

Приклад 12 Розв'яжіть порівняння $32n \equiv 7$.

Розв'язання

Оскільки $32 \equiv 5$, то задане порівняння можна представити у вигляді $-5n \equiv 7, 5n \equiv -7 \equiv 30$.

Маємо $5 \cdot n \equiv 5 \cdot 6$. Тоді $n \equiv 6$ (за властивістю 8).

Відповідь. $n \equiv 6$.

Як ми вже зазначали раніше, при розв'язуванні порівнянь іноді доцільно помножити праву й ліву частини на одне й те саме число.

Приклад 13 Розв'яжіть порівняння $11x \equiv 15$.

Розв'язання

Зауважимо, що число 11^2 при діленні на 24 має остачу 1. Помножимо праву й ліву частини даного порівняння на 11, маємо:

$$121x \equiv 165, x \equiv -3.$$

Відповідь. $x \equiv -3$.

З'ясуємо ще одне правило скорочення для порівнянь. Для цього зауважимо, що числа, порівнювані за модулем, відрізняються на число, кратне модулю. Тобто якщо $a \equiv b$, то $a = kn + b$. В останньому співвідношенні можна скоротити на



спільний множник чисел a , n і b (якщо він існує). Отже, якщо НСД (a , n , b) = c (якщо $c \neq 1$), то порівняння можна скоротити на c .

10. Якщо числа a , n і b у порівнянні $a \equiv b$ мають спільний множник c , то правильним буде порівняння

$$a : c \stackrel{n:c}{\equiv} b : c.$$

Приклад 14 Розв'яжіть порівняння $78x \equiv 57$.

Розв'язання

1) Числа 78, 93 і 57 діляться на 3. Тоді правильними будуть порівняння $26x \stackrel{31}{\equiv} 19$, $-5x \stackrel{31}{\equiv} -12$, $5x \stackrel{31}{\equiv} 12$.

2) Зауважимо, що число $5 \cdot 6 = 30$ на 1 відрізняється від модуля 31. Помножимо обидві частини останнього порівняння на 6, маємо $30x \stackrel{31}{\equiv} 72$, $-x \stackrel{31}{\equiv} 10$, $x \stackrel{31}{\equiv} -10$.

Відповідь. $x \stackrel{31}{\equiv} -10$.

До розв'язування порівнянь можна звести задачу

ПРО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯННЯ В ЦІЛИХ ЧИСЛАХ.

Приклад 15 Знайдіть усі пари цілих чисел x і y , що задовільняють рівняння $7x - 23y = 131$.

Розв'язання

1) Оскільки $7 \stackrel{7}{\equiv} 0$, $23 \stackrel{7}{\equiv} 2$, $18 \cdot 7 = 126$, $131 \stackrel{7}{\equiv} 5$, маємо: $-2y \stackrel{7}{\equiv} 5$; $2y \stackrel{7}{\equiv} -5 \stackrel{7}{\equiv} 2$, $2 \cdot y \stackrel{7}{\equiv} 2 \cdot 1$.

Звідси $y \stackrel{7}{\equiv} 1$, тобто $y = 7k + 1$, де k – ціле число.

2) Тепер легко знайти x :

$$7x - 23(7k + 1) = 131, \quad 7x = 154 + 23 \cdot 7k, \quad x = 22 + 23k.$$

Відповідь. $x = 22 + 23k$, $y = 1 + 7k$, де $k \in Z$.

Приклад 16 Розв'яжіть у цілих числах рівняння

$$x^2 + 25y^3 = 12.$$

Розв'язання

Знайдемо порівняння за модулем 5 правої та лівої частин даного рівняння: $x^2 \stackrel{5}{\equiv} 2$, чого не може бути за лемою 3.

Відповідь. Розв'язків немає.





Приклад 17 (Опорна задача). Доведіть, що якщо p – просте число і a не ділиться на p , то серед чисел $a, 2a, 3a, \dots, (p-1)a$ немає двох чисел з однаковими остачами при діленні на p .

Розв'язання

Нехай такі два числа ka і ta існують, тобто $a \cdot k \equiv a \cdot t$, де $k \neq t$. Тоді $k \equiv t$ (за властивістю 8), що суперечить припущення. Тобто серед чисел $a, 2a, 3a, \dots, (p-1)a$ при діленні на p кожна з можливих остач $\{0, 1, 2, \dots, p-1\}$ трапляється лише один раз.

Щ. в. д.

Доведемо тепер дуже важливу теорему, яку довів *П'єр Ферма* (1601–1665), і яку називають *малою теоремою Ферма* (щоб відрізнити від великої теореми Ферма – див. § 4, с. 49).

МАЛА ТЕОРЕМА ФЕРМА

Нехай p – просте число і a – натуральне число, що не ділиться на p , тоді $a^{p-1} \equiv 1$.

Доведення

Розглянемо числа $a, 2a, 3a, \dots, (p-1)a$. Як було доведено у прикладі 17, при діленні на p цих чисел кожна з можливих остач $\{0, 1, 2, \dots, p-1\}$ трапляється лише один раз. Тоді

$$a \cdot 2a \cdot 3a \cdot \dots \cdot (p-1)a \stackrel{p}{\equiv} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (p-1), \quad (p-1)! \cdot a^{p-1} \stackrel{p}{\equiv} (p-1)!$$

За умовою p – просте число, тоді p і $(p-1)!$ взаємно прості числа і (за властивістю 8)

$$a^{p-1} \stackrel{p}{\equiv} 1.$$

Щ. в. д.

Зауважимо, що з малої теореми Ферма випливає таке.

Наслідок. Якщо p – просте число і a – натуральне число, що не ділиться на p , то $a^p \stackrel{p}{\equiv} a$.

Приклад 18 Знайдіть остаточу від ділення 3^{102} на 101.

Розв'язання

Число 101 – просте. Тоді за малою теоремою Ферма $3^{100} \stackrel{101}{\equiv} 1$. Маємо $9 \cdot 3^{100} \stackrel{101}{\equiv} 9$.

Відповідь. 9.





Приклад 19 Доведіть, що число $n^{13} - n$ ділиться на 13 для всіх $n \in N$.

Розв'язання

1) Якщо n кратне числу 13, то твердження умови виконується.

2) Якщо n не кратне числу 13, то за малою теоремою Ферма для $p = 13$ маємо $n^{13-1} \equiv 1$, тобто $n^{12} \equiv 1$. Тоді число $n^{12} - 1$ ділиться на 13, звідси і число $n^{13} - n$ теж кратне числу 13.

Щ. в. д.

Приклад 20 Доведіть, що число $222^{333} + 333^{222}$ ділиться на 7.

Розв'язання

Число 7 – просте, тоді за малою теоремою Ферма $222^6 \equiv 1$ і $333^6 \equiv 1$.

При діленні 333 на 6 маємо $333 = 55 \cdot 6 + 3$. Тоді

$$222^{333} = 222^{6 \cdot 55 + 3} = (222^6)^{55} \cdot 222^3.$$

Оскільки $222^6 \equiv 1$ та $222^3 \equiv 5$, то $(222^6)^{55} \equiv 1$ та $222^3 \equiv 125$.

Число 126 ділиться на 7, тоді $125 \equiv -1$. Маємо:

$$(222^6)^{55} \cdot 222^3 \equiv -1.$$

Аналогічно: $333^{222} = 333^{6 \cdot 37} = (333^6)^{37} \equiv 1$.

Після додавання відповідних порівнянь отримаємо:

$$222^{333} + 333^{222} \equiv 0 \pmod{7}.$$

Тобто задане число ділиться на 7.

Щ. в. д.

ПОРІВНЯННЯ І ОЗНАКИ ПОДІЛЬНОСТІ

Використовуючи властивості порівняння, доведемо і запишемо мовою порівнянь ознаки подільності, більшість з яких уже вам відома. Для цього представимо довільне натуральне число у вигляді

$$a = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0} = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0. \quad (*)$$

Нагадаємо: при $k \geq 2$ степені 10^k діляться на 4, тому *ознакою подільності на 4 буде ділення без остачі на 4 двоцифрового числа $\overline{a_1 a_0}$* . Тобто





• **Ознака подільності на 4:** $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0} \stackrel{4}{\equiv} \overline{a_1 a_0}$.

Доведемо і запишемо мовою порівнянь ознаку подільності на 3 і на 9: **число a ділиться на 3 (на 9), якщо сума цифр цього числа $a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0$ ділиться на 3 (на 9).**

Розглянемо порівняння числа (*) за модулем 9. Маємо $10 \stackrel{9}{\equiv} 1$, тоді $10^k \stackrel{9}{\equiv} 1$ для всіх $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$. Тоді

$$a_0 \stackrel{9}{\equiv} a_0, 10a_1 \stackrel{9}{\equiv} a_1, \dots, 10^n a_n \stackrel{9}{\equiv} a_n.$$

Після додавання цих порівнянь отримаємо:

$$a = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0 \stackrel{9}{\equiv} a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0.$$

Аналогічно, у випадку порівняння за модулем 3:

$$a = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0 \stackrel{3}{\equiv} a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0.$$

• **Ознака подільності на 3:** $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0} \stackrel{3}{\equiv} a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0$.

• **Ознака подільності на 9:** $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0} \stackrel{9}{\equiv} a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0$.

Тепер доведемо ознаку подільності на 11.

- Число $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}$ ділиться на 11, якщо ділиться на 11 знакозмінна сума цифр цього числа:

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots + (-1)^n a_n.$$

Маємо: $10 \stackrel{11}{\equiv} -1$. Тоді $10^k \stackrel{11}{\equiv} (-1)^k$, де $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$, $a_k 10^k \stackrel{11}{\equiv} a_k (-1)^k$.

Враховуючи властивість суми порівнянь і те, що $(-1)^k = 1$, якщо k – парне, і $(-1)^k = -1$, якщо k – непарне, отримаємо шукану умову подільності на 11.

Приклад 21 Чи ділиться число 1 522 906 на 11?

Розв'язання

Знакозмінна сума цифр цього числа $6 - 0 + 9 - 2 + 2 - 5 + 1 = 11$ ділиться на 11, тоді і саме число ділиться на 11.
Відповідь. Так.

Доведемо об'єднану ознаку подільності на 7, 11, 13. Поділимо десятковий запис числа справа наліво на трійки цифр.



Утворені таким способом числа $\overline{a_2a_1a_0}$, $\overline{a_5a_4a_3}$, $\overline{a_8a_7a_6}$, ... будемо називати *трицифровими гранями* даного числа.

- Число $a = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}$ ділиться на 7, 11, 13, якщо на ці числа ділиться знакозмінна сума трицифрових граней даного числа.

$$a \stackrel{p}{\equiv} \overline{a_2a_1a_0} - \overline{a_5a_4a_3} + \overline{a_8a_7a_6} - \dots, p \in \{7, 11, 13\}.$$

Доведення

Зауважимо, що $10^3 + 1 = 1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$. Тоді $10^3 \stackrel{p}{\equiv} -1$ для $p \in \{7, 11, 13\}$. Звідси $10^{3k} \stackrel{p}{\equiv} (-1)^k$.

Запишемо задане число a у вигляді

$$a = \overline{a_2a_1a_0} + 10^3 \overline{a_5a_4a_3} + (10^3)^2 \overline{a_8a_7a_6} + \dots$$

Тоді, аналогічно доведенню ознаки подільності на 11, отримаємо

$$a \stackrel{p}{\equiv} \overline{a_2a_1a_0} - \overline{a_5a_4a_3} + \overline{a_8a_7a_6} - \dots, p \in \{7, 11, 13\}.$$

Щ. в. д.

Приклад 22 Чи ділиться число 5 159 539 на 7, 11, 13?

Розв'язання

Розіб'ємо дане число справа наліво на трицифрові грані числа: $5*159*539$. Знакозмінна сума отриманих чисел дорівнює $539 - 159 + 5 = 385 = 5 \cdot 7 \cdot 11$, ділиться на 7 і 11, але не ділиться на 13.

Відповідь. Ділиться на 7 і 11, але не ділиться на 13.

Приклад 23 Доведіть, що довільне натуральне число є пірівнюванням зі своєю останньою цифрою:

- за модулем 10;
- за модулем 2;
- за модулем 5.

Розв'язання

Запишемо довільне натуральне число a у вигляді $a = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}$ і розглянемо різницю

$$\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0} - a_0 = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 0} \stackrel{10}{\equiv} 0,$$

і твердження задачі виконуються.

Щ. в. д.



Приклад 24* Гра Баше. Двоє по черзі називають будь-які цілі числа в межах від 1 до 10 включно. Виграє той, хто перший доведе суму всіх названих (обома гравцями) чисел до 100. Для кого ця гра виграшна: для того, хто починає, чи для того, чий хід другий?

Розв'язання

Число 100 не ділиться на 11, а гравець не може назвати число, більше за 10. Тоді, якщо якомусь гравцеві вдасться створити позицію (перед ходом партнера), щоб $100 - s$ (s – сума раніше названих чисел) ділилося на 11, то партнер своїм ходом не зможе її виправити.

Указану можливість має перший гравець. Для цього йому треба назвати число 1. Після ходу другого створити позицію $(100 - s) : 11$ й відновлювати її кожним своїм наступним кроком.

Відповідь. Виграє перший гравець.

ЗАВДАННЯ 7

1. Знайдіть остаточу від ділення:
а) 9^{999} на 8; б) 16^{2012} на 3; в) 13^{121} на 14.
2. Знайдіть усі можливі значення n , якщо:
а) $15n \stackrel{14}{\equiv} 2$; б) $15n \stackrel{16}{\equiv} 2$; в) $8n \stackrel{3}{\equiv} 2$.
3. Знайдіть остаточу від ділення:
а) $(116 + 17^{17})^{21}$ на 8; б*) $9^{999} + 999 \cdot 998 \cdot 997$ на 8.
4. Доведіть, що:
а) число $19^{19} + 92^{19}$ ділиться на 111;
б) число $30^{99} + 61^{100}$ ділиться на 31;
в) число $43 \cdot 101 + 23 \cdot 101$ ділиться на 66;
г) число $2^{6k+1} + 3^{6k+1} + 5^{6k} + 1$ ділиться на 7.
- 5*. Доведіть, що при всіх $n \in N$:
а) $n^5 + 4n$ ділиться на 5;
б) $n^3 + 11n$ ділиться на 6;
в) $n^5 - n$ ділиться на 10;
г) $a^{2n+1} - (a-1)^{n+2}$, де $a \in N$, ділиться на $a^2 - a + 1$.
6. Знайдіть усі значення n , при яких:
а) число $8n + 1$ ділиться на 7;
б) число $81 - 13n$ ділиться на 11;
в) $29n - 40$ ділиться на 13;
г*) $n^3 - 3$ ділиться на $n - 3$.
7. Доведіть, що при кожному невід'ємному цілому k число $2^{6k+1} + 3^{6k+1} + 5^{6k} + 1$ ділиться на 7.

8. Доведіть теорему Вільсона. Якщо p – просте число, то $(p-1)! \stackrel{p}{\equiv} -1$.
- 9*. Доведіть, що не існує $n \in N$, для якого 10^{3n+1} дорівнює сумі кубів двох натуральних чисел.
10. Чи можна число $\underbrace{11\dots1}_{2012}$ представити у вигляді суми двох квадратів?
- 11*. Розв'яжіть порівняння:
- а) $3n \stackrel{8}{\equiv} 2$; б) $17x \stackrel{37}{\equiv} 19$; в) $147y \stackrel{29}{\equiv} 63$; г) $58 \stackrel{47}{\equiv} 87$.
12. Розв'яжіть у цілих числах рівняння за допомогою порівнянь:
- а) $7x + 8y = 1$; б) $13x - 15y = 16$; в*) $257x + 18y = 175$.
13. Чи мають розв'язки у цілих числах рівняння:
- а) $x^2 - 7y = 10$; б) $15x^2 - 7y^2 = 9$; в) $x^3 + 21y^2 + 5 = 0$?
- 14*. Розв'яжіть у цілих числах систему рівнянь
- $$\begin{cases} 3x + 5y - 7z = 1, \\ 4x + 9y + 11z = 2. \end{cases}$$
15. Знайдіть остаточу від ділення: а) 2^{100} на 101; б) 14^{256} на 17.
- 16*. Доведіть, що число $2^{70} + 3^{70}$ ділиться на 13.
- 17*. Доведіть, що число $(7^{120} - 1)$ ділиться на:
- а) 11; б) 13; в) 143.
- 18*. Доведіть, що для довільного натурального n , яке не кратне 17, або $n^8 - 1$, або $n^8 + 1$ ділиться на 17.
- 19*. Доведіть, що для всіх $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ число $2^{2^{6k+2}}$ ділиться на 19.
- 20*. Доведіть, що для довільних цілих a і b та простого p виконується порівняння $a + b \stackrel{p}{\equiv} a^p + b^p$.
- 21*. Сума кількох цілих чисел ділиться на 6. Доведіть, що й сума кубів цих чисел ділиться на 6.
- 22*. Сума $a + b + c$ ділиться на 7. Доведіть, що $a^7 + b^7 + c^7$ також кратна числу 7.
- 23*. Доведіть, що якщо $a + b + c$ ділиться на 30, то і сума $a^5 + b^5 + c^5$ ділиться на 30.
- 24*. Доведіть, що $n^{13} - n$ ділиться на 2730.
25. Знайдіть ознаку подільності числа на:
- а) 8; б) 16; в) 20; г) 25.
- 26*. Яка ознака подільності на 7 у вісімковій системі числення?



- 27*. Яка ознака подільності на 9 у вісімковій системі числення?
- 28*. Які ознаки подільності на $p - 1$ і на $p + 1$ у системі числення з основою p ?
- 29*. Доведіть таку ознаку подільності на 19. Останню цифру даного числа подвоюємо і утворене число додаємо до числа, що залишиться від даного, якщо закреслити його останню цифру; з новим числом зробити те саме; і т. д. поки не отримаємо двоцифрове число. Дане число ділиться на 19 тоді й тільки тоді, коли утворене двоцифрове число ділиться на 19.
- 30*. Сформулюйте і доведіть ознаки подільності на 29, 31, 41 (аналогічно до задачі 29).
- 31*. Двоє пишуть $2k$ -цифрове число, застосовуючи лише цифри 6, 7, 8, 9 (за один хід можна дописати лише одну цифру). Якщо отримане число буде ділитися на 9, то виграє другий гравець, а якщо ні, то перший. При яких значеннях k і за якої стратегії другий може виграти? А перший?
- 32*. Двоє по черзі називають будь-які цілі числа в межах від 1 до 10 включно. Виграє той, хто перший доведе суму всіх названих (обома гравцями) чисел до 121. Для кого ця гра виграшна: для того, хто починає, чи для того, чий хід другий?
- 33*. У купці n сірників. Два гравці беруть по черзі сірники з купки. Кожен має право взяти будь-яку кількість сірників від 1 до $b - 1$ включно. Переможе той, хто забере останні сірники. Як закінчиться гра, якщо обидва партнери гратимуть правильно?





Розділ III

НЕСТАНДАРТНІ МЕТОДИ У РОЗВ'ЯЗУВАННІ ЗАДАЧ НА ЦІЛІ ЧИСЛА

§ 8*. Метод математичної індукції

При розв'язуванні багатьох задач, у тому числі й на множині цілих чисел, стане в нагоді *метод математичної індукції*. У жартівливій формі його іноді представляють так.

Якщо перша людина в черзі – жінка, і за кожною жінкою в цій черзі стоїть жінка, то всі в черзі – жінки.

Сформулюємо цей принцип більш серйозно.

Якщо є послідовність тверджень, перше твердження якої правильне, при цьому з правильності довільного з тверджень випливає правильність наступного, то всі твердження в цій послідовності правильні.

Таким чином застосування методу математичної індукції для доведення правильності всіх тверджень $\{T_1, T_2, T_3, \dots\}$ послідовності складається з трьох кроків.

1. **Доводимо, що перше або кілька перших тверджень правильні.**
2. **Робимо припущення, що твердження T_k – правильне, і доводимо, що правильним буде тоді і твердження T_{k+1} .**
3. **Робимо висновок, що твердження T_n буде правильним для довільного $n \in N$, тобто всі твердження T_1, T_2, T_3, \dots – правильні.**

Чому всі ці твердження істинні? Ми перевірили принаймні твердження T_1 . Потім ми довели, що з твердження T_k випливає T_{k+1} . Тоді з T_1 випливає T_2 , з T_2 випливає T_3, \dots

Логічний крок (1) називають *базою індукції*, а крок (2) – *індукційним переходом*.

З ауваження.

- З істинності великої кількості перших тверджень $T_1, T_2, T_3, \dots, T_m$ не випливає правильність твердження T_n для довільного n . Тобто з (1) не можна відразу перейти до (3). Такий дуже популярний помилковий умовивід називають *неповною індукцією*.
- Якщо доведено індукційний перехід (тобто, що з T_k випливає T_{k+1}), але не доведено базу індукції (тобто, що ви-





конується T_1), то з цього не випливає правильність твердження T_n для довільного n . Тобто у (1) треба обов'язково довести правильність першого твердження T_1 .

- Якщо доведено не перше твердження T_1 , а наприклад, восьме T_8 , то після доведення індукційного переходу маємо, що виконуються всі твердження, починаючи з восьмого. Тобто правильними є всі T_n для $n \geq 8$.

Приклад 1 Доведіть, що довільну суму, більшу за 7 коп., можна сплатити монетами номіналом 3 коп. та 5 коп.

Розв'язання

Індукцію проведемо по кількості копійок.

1) База індукції. Суму 8 коп. очевидно можна сплатити.

2) Індукційний переход. Нехай можемо сплатити суму k копійок. Доведемо, що тоді можна сплатити і суму $k + 1$ копійок.

Якщо серед монет у сумі k копійок є монета 5 коп., то заміною її на дві монети по 3 коп. отримаємо суму $k + 1$ копійок.

Якщо серед монет у сумі k копійок немає монети 5 коп., тобто всі монети по 3 коп., то їх не менше ніж 3 шт. Тоді заміною трьох монет по 3 коп. на дві монети по 5 коп. збільшимо суму на 1.

3) Висновок. З (1) і (2) робимо висновок, що довільну суму, більшу за 7 коп., можна сплатити монетами номіналом 3 коп. та 5 коп.

Щ. в. д.

Приклад 2 Доведіть, що для довільного натурального n виконується рівність $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Розв'язання

Позначимо ліву частину рівності як A_n .

$$1) \text{ При } n = 1, A_1 = 1, \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1 = A_1.$$

$$\text{При } n = 2, A_2 = 3, \frac{n(n+1)}{2} = \frac{2 \cdot 3}{2} = 3 = A_2.$$

$$2) \text{ Нехай } A_k = \frac{k(k+1)}{2}. \text{ Треба довести, що}$$

$$A_{k+1} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$



$$\begin{aligned} A_{k+1} &= A_k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = (k+1)\left(\frac{k}{2} + 1\right) = \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2}. \end{aligned}$$

Твердження індукційного переходу доведено.

3) З (1) і (2) робимо висновок, що твердження умови є правильним при довільному $n \in N$.

Щ. в. д.

Приклад 3 Доведіть, що для довільного $n \in N$ число $n^5 - n$ ділиться на 5.

Розв'язання

Застосуємо метод математичної індукції.

1) При $n = 1$ маємо: $1 - 1 = 0$ ділиться на 5.

2) Нехай вираз $k^5 - k$ ділиться на 5. Розкриємо дужки у виразі $(k+1)^5 - (k+1)$, скориставшись формуловою бінома Ньютона (див. § 5, с. 68), маємо

$$\begin{aligned} k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1 - k - 1 &= \\ &= (k^5 - k) + 5(k^4 + 2k^3 + 2k^2 + k). \end{aligned}$$

Перший доданок кратний числу 5 за припущенням, а другий доданок кратний числу 5, бо має множник 5. Отже, $((k+1)^5 - (k+1)) : 5$.

3) З (1) і (2) робимо висновок, що твердження умови є правильним при довільному $n \in N$.

Щ. в. д.

Приклад 4 Доведіть, що при довільному $n \in N$ число $4^n + 15n - 1$ ділиться на 9.

Розв'язання

Застосуємо метод математичної індукції.

1) При $n = 1$ маємо: $4 + 15 - 1 = 18$ – ділиться на 9.

2) Нехай вираз $4^k + 15k - 1$ ділиться на 9. Доведемо, що тоді вираз $4^{k+1} + 15(k+1) - 1$ теж ділиться на 9.

$$4^{k+1} + 15(k+1) - 1 = 4 \cdot 4^k + 15k + 15 - 1 = (4^k + 15k - 1) + 3 \cdot (4^k + 5).$$

Перший доданок (вираз у дужках) ділиться на 9 за припущенням. Число 4 при діленні на 3 дає остаточу 1, звідси вираз $4^k + 5$ ділиться на 3. Тоді $3 \cdot (4^k + 5)$ ділиться на 9. Маємо, що вираз $4^{k+1} + 15(k+1) - 1$ ділиться на 9.

3) З (1) і (2) робимо висновок, що число $4^n + 15n - 1$ ділиться на 9 при довільному $n \in N$.

Щ. в. д.





Приклад 5* Доведіть, що для всіх $n \in N$ виконується нерівність $2^n > n$.

Розв'язання

Застосуємо метод математичної індукції.

1) При $n = 1$ маємо очевидне твердження: $2 > 1$; при $n = 2$ маємо очевидне твердження: $4 > 2$.

2) Нехай $2^k > k$. Доведемо, що тоді $2^{k+1} > k + 1$, де $k \geq 2$.

Розглянемо різницю $2^{k+1} - 2^k = 2^k(2 - 1) = 2^k > k > 1$. Тоді $2^{k+1} > 2^k + 1 > k + 1$.

3) З (1) і (2) робимо висновок, що $2^n > n$ для всіх $n \in N$.

Щ. в. д.

Приклад 6* Доведіть, що число, яке записується за допомогою 3^n одиниць, ділиться на 3^n .

Розв'язання

Застосуємо метод математичної індукції.

1) При $n = 0$ і $n = 1$ твердження умови виконується ($n = 0$ – грає роль першого твердження).

2) Нехай число, що записується за допомогою 3^k одиниць, ділиться на 3^k . Відношення числа, що записується за допомогою 3^{k+1} одиниць, до числа, що записується за допомогою 3^k одиниць, дорівнює $100^{3^k} + 10^{3^k} + 1$ і ділиться на 3. Тоді число, що записується за допомогою 3^{k+1} одиниць, ділиться на $3 \cdot 3^k = 3^{k+1}$.

3) З (1) і (2) робимо висновок, що число, яке записується за допомогою 3^n одиниць, ділиться на 3^n при довільному цілому невід'ємному n .

Щ. в. д.

ФОРМУЛА БІНОМА НЬЮТОНА

Доведемо методом математичної індукції формулу бінома Ньютона (див. § 5, с. 68):

$$(a + b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + \dots + C_n^m a^{n-m}b^m + \dots + C_n^{n-1}ab^{n-1} + C_n^n b^n.$$

Доведення

1) При $n = 1$ маємо очевидне твердження

$$(a + b)^1 = C_1^0 a + C_1^1 b = a + b.$$

2) Нехай правильним є твердження

$$(a + b)^k = C_k^0 a^k + C_k^1 a^{k-1}b + \dots + C_k^m a^{k-m}b^m + \dots + C_k^{k-1}ab^{k-1} + C_k^k b^k.$$





Помножимо цей вираз на $(a + b)$ і зведемо подібні доданки:

$$(a + b)^k(a + b) = C_k^0 a^{k+1} + (C_k^0 + C_k^1)a^k b + \dots + (C_k^{m-1} + C_k^m)a^{k-m+1}b^m + \\ + \dots + (C_k^{k-1} + C_k^k)ab^k + C_k^k b^{k+1}.$$

За властивістю комбінацій (див. с. 66)

$$C_k^{m-1} + C_k^m = C_{k+1}^m, \quad C_k^0 = 1 = C_{k+1}^0, \quad C_k^k = 1 = C_{k+1}^{k+1}.$$

Тоді

$$(a + b)^{k+1} = C_{k+1}^0 a^{k+1} + C_{k+1}^1 a^k b + \dots + C_{k+1}^m a^{k+1-m} b^m + \dots + \\ + C_{k+1}^k ab^k + C_{k+1}^{k+1} b^{k+1}.$$

Індукційний перехід доведено.

3) Висновок: формула бінома Ньютона виконується для довільного натурального числа n .

ЗАВДАННЯ 8

1. Доведіть методом математичної індукції, що для довільного $n \in N$ справджується співвідношення

$$1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2.$$

2. Доведіть, що для всіх натуральних n виконується рівність

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

3. Доведіть рівність $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$.

4. Банк має необмежену кількість купюр номіналом по три і п'ять гривень. Доведіть, що він може виплачувати без здачі довільну кількість гривень, починаючи з восьми.

5. Аркуш паперу дозволяється рвати на 4 або на 6 шматків. Доведіть, що за цим правилом його можна розірвати на довільну кількість шматочків, починаючи з 9.

6. Доведіть, що всі члени послідовності $\{a_i\}$ є натуральними числами, якщо $a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+2} = \frac{a_{n+1}^2 + 2}{a_n}$.

7. Доведіть, що при всіх $n \in N$ справджується $a_n = 2^n + 1$, якщо $a_1 = 3$, $a_2 = 5$ і $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$.

8. Доведіть, що сума кубів трьох послідовних натуральних чисел ділиться на 9.

9. Доведіть, що при всіх $n \in N$:

1) $n^3 - 4n$ ділиться на 3;

2) $6^{2n-1} + 1$ ділиться на 7;





- 3) $7^{2n} - 1$ ділиться на 48;
 4) $3^{3n+2} + 2^{4n+1} + 1$ ділиться на 11;
 5) $n^3 + (n + 1)^3 + (n + 2)^3$ ділиться на 9;
 6) $3^{2n+2} + 8n - 9$ ділиться на 16;
 7) $(9^{n+1} - 8^n - 9)$ ділиться на 16;
 8) $10^{n+1} - 10(n + 1) + n$ ділиться на 81;
 9*) $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ ділиться на 133;
 10*) $3^{3n+3} - 26n - 27$ ділиться на 169;
 11*) $k^{2^n} - 1$, де k непарне натуральне число, ділиться на 2^{n+2} .
 10. Доведіть, що для натуральних $n > 1$ виконується нерівність $2^{n-1}(a^n + b^n) > (a + b)^n$, якщо $a + b > 0$, $a \neq b$.
 11*. Доведіть, що якщо $n \in N$ і $n > 4$, то $2^n > 5n + 1$.
 12. Доведіть, що якщо $a \geq 0$, $b \geq 0$ і $n \in N$, то
- $$\left(\frac{a+b}{2}\right)^n \leq \frac{a^n + b^n}{2}.$$
13. При яких натуральних n : а) $2^n > 2n + 1$; б*) $2^n > n^2$?
 14*. Доведіть, що для будь-якого натурального n виконується нерівність: а) $2^{n-1} \geq n$; б) $4^n > 7n - 5$.
 15*. Доведіть, що $2^{n+m-2} \geq nm$ для будь-яких натуральних n і m .
 16*. Доведіть нерівність Бернулі: для $n \in N$, $n > 1$ виконується нерівність $(1 + a)^n > 1 + na$, якщо $a > -1$, $a \neq 0$.
 17*. На скільки частин ділять площину n прямих, жодні дві з яких не паралельні і жодні три не перетинаються в одній точці?

§ 9. Принцип Діріхле

Мабуть, ви вже чули про *принцип Діріхле*. Найчастіше при першому ознайомленні цей принцип пояснюють так.

Якщо в n клітках розмістили $n + 1$ кролів, то хоча б у одній з них сидить не менше двох кролів.

Такий, начебто простий, принцип дає змогу розв'язувати непрості задачі, не тільки логічного характеру, а й, наприклад, геометричні, з теорії чисел тощо. Головне при використанні цього принципу з'ясувати, кого призначати на роль «кроля», а кого – на роль «клітки».

Приклад 1 У лісі росте мільйон ялинок. Відомо, що на кожній з них не більше ніж 600 000 голок. Доведіть, що в цьому лісі знайдеться принаймні дві ялинки з однаковою кількістю голок.





Розв'язання

Маємо мільйон «кролів»-ялинок і лише 600 001 «клітку» з номерами від 0 до 600 000. Кожного «кроля»-ялинку треба посадити у «клітку», на якій зроблено напис про кількість її голок. Якщо посадити «кролів» по одному – матимемо 600 001 «кроля»-ялинку. Всіх інших треба розсаджувати в уже заповнені «клітки». Але якщо два «кролі»-ялинки містяться в одній «клітці», то вони мають однакову кількість голок.

Твердження доведено.

Іноді зручно використовувати *узагальнений принцип Діріхле*.
Якщо в n клітках сидить $kn + 1$ кролів, то в якійсь із кліток сидить принаймні $k + 1$ кролів.

Приклад 2 У магазин привезли 25 ящиків трьох сортів цукерок (у кожному ящику міститься цукерки лише одного сорту). Доведіть, що серед них є хоча б 9 ящиків з цукерками одного сорту.

Розв'язання

25 ящиків-«кролів» розсадимо по трьох «клітках»-сортах. Маємо $25 = 3 \cdot 8 + 1$. Тоді, за узагальненим принципом Діріхле ($n = 3$, $k = 8$), маємо, що в якійсь «клітці»-сорті міститься не менше ніж $8 + 1 = 9$ ящиків-«кролів».

Твердження доведено.

Зрозуміло, що при оформленні запису розв'язування задач роблять посилання на принцип Діріхле без явного присвоєння об'єктам, що досліджуються, назв «кролі» і «кліткі».

Розглянемо ще кілька прикладів застосування принципу Діріхле, зокрема у задачах із теорії чисел.

Приклад 3 Доведіть, що серед будь-яких $n + 1$ різних цілих чисел можна обрати два числа, різниця яких ділиться на n .

Розв'язання

Нехай маємо $n + 1$ різних цілих чисел. Подіlimо кожне із цих $n + 1$ чисел на n . Отримані остатці належать множині чисел $\{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$ і їх не може бути більше за n . Тоді, за принципом Діріхле, принаймні два числа при діленні на n дають однакову остатчу і їх різниця ділиться на n .

Щ. в. д.





Зауважимо, що іноді при розв'язуванні задачі за допомогою принципу Діріхле треба розглянути кілька з можливих варіантів, щоб обмежити число «кліток».

Приклад 4 У турнірі беруть участь n шахістів. Кожні два з них повинні зіграти між собою одну партію. Доведіть, що в будь-який момент змагань знайдеться два шахісти, які зіграли однакову кількість партій.

Розв'язання

Кожен шахіст має зіграти $n - 1$ партію (з кожним іншим шахістом). Тоді кількість зіграних ними партій може дорівнювати $0, 1, 2, \dots, n - 1$. Отже, маємо n чисел у множині кількості зіграних партій і n шахістів. Спробуємо обмежити кількість елементів у множині зіграних партій. Розглянемо два випадки.

1) Є шахіст, котрий не зіграв ще жодної партії.

Тоді кількість партій, що зіграно кожним шахістом, може дорівнювати $\{0, 1, 2, \dots, n - 2\}$. Маємо, що n шахістам треба поставити у відповідність $n - 1$ число $\{0, 1, 2, \dots, n - 2\}$.

Звідси, за принципом Діріхле, хоча б два шахісти зіграли однакову кількість партій.

2) Немає такого шахіста, котрий не зіграв ще жодної партії.

Тоді кількість партій, що зіграно кожним шахістом, може дорівнювати $\{1, 2, \dots, n - 1\}$. Маємо, що n шахістам треба поставити у відповідність $n - 1$ число $\{1, 2, \dots, n - 1\}$.

Звідси, за принципом Діріхле, хоча б два шахісти зіграли однакову кількість партій.

Твердження умови доведено.

Приклад 5 Доведіть, що серед n натуральних чисел, записаних у певному порядку, можна вибрати кілька сусідніх чисел, сума яких ділиться на n .

Розв'язання

Розглянемо n чисел $a_1, a_1 + a_2, \dots, a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

Можливі такі випадки.

1) Якесь з них ділиться на n , тоді задача розв'язана.

2) Жодне з них не кратне n , тоді при діленні на n матимемо остачі з множини чисел $\{1, 2, \dots, n - 1\}$ – усього може бути не більше як $n - 1$ остач. Тоді, за принципом Діріхле, хоча б дві з них збігаються. Різниця цих чисел і буде шуканою сумою.

Щ. в. д.





Приклад 6 Доведіть, що серед будь-яких $n + 1$ різних натуральних чисел, менших від $2n$, можна знайти три числа, сума двох з яких дорівнює третьому.

Розв'язання

Нехай a_1, a_2, \dots, a_{n+1} – задані числа.

Розглянемо n чисел виду

$$a_2 - a_1, a_3 - a_1, \dots, a_{n+1} - a_1 \quad (\text{усі ці числа різні})$$

та n чисел виду

$$a_2, \dots, a_{n+1} \quad (\text{усі ці числа різні}).$$

Кожне з таких чисел менше від $2n$, а всього їх $2n$. Тоді деяке число першого ряду дорівнює деякому числу другого ряду:

$$a_k - a_1 = a_l \text{ і } a_k = a_1 + a_l.$$

Щ. в. д.

Приклад 7 Доведіть, що серед чисел, записаних тільки цифрами 0 і 1, є число, що ділиться на 2011.

Розв'язання

Розглянемо множину 2012 чисел: 1; 11; 111; ... 111...1.

При діленні чисел на 2011 маємо 2011 остатч: від 0 до 2010. Тоді, за принципом Діріхле, хоча б два числа з пропонованої множини 2012 чисел мають однакові остатчі при діленні на 2011, їх різниця буде числом, кратним числу 2011, і записуватиметься за допомогою цифр 0 і 1.

Щ. в. д.

Приклад 8 Доведіть, що серед чисел 111...1 є число, що ділиться на 2011.

Розв'язання

У попередньому прикладі ми отримали число $\underbrace{11\dots1}_{m} \underbrace{00\dots0}_k$, яке ділиться на 2011. Запишемо його у вигляді $a \cdot 10^k$. Другий множник цього числа не кратний числу 2011. Тоді число $\underbrace{11\dots1}_m$ ділиться на 2011. *Щ. в. д.*

Не треба забувати про улюблений метод доведення Евкліда – *метод від супротивного*.





Приклад 9 У класі 30 учнів. Один з них зробив у диктанті 13 помилок, а інші – меншу кількість. Доведіть, що принаймні 3 учні зробили однакову кількість помилок. (Зауважимо, що кількість помилок може дорівнювати нулю.)

Розв'язання

Кількість помилок, що зробили $30 - 1 = 29$ учнів, може дорівнювати 0, 1, ..., 12 – усього 13 значень. Нехай кожному із цих 13 чисел відповідає по два учні. Тоді маємо загальну кількість учнів $13 \cdot 2 = 26 < 29$. Прийшли до суперечності.

Твердження умови доведено.

Приклад 10 Доведіть, що серед будь-яких 100 чисел можна знайти 15 таких, що різниця будь-яких двох з них ділиться на 7 без остачі.

Розв'язання

Маємо 7 остач від ділення на 7 (0, 1, ..., 6). Нехай неможливо вибрати 15 чисел з однаковою остачею. Тоді серед 100 даних чисел не більше як 14 мають однакову остачу. Маємо $14 \cdot 7 = 98 < 100$. Прийшли до суперечності.

Твердження умови доведено.

Сформулюємо принцип Діріхле мовою множин.

Нехай маємо множини $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ і $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$. Кожному елементу a_i множини A поставимо у відповідність елемент b_i множини B . Назовемо таку відповідність відображенням A у B , а b_i – образом a_i .

Якщо $m > n$, то при будь-якому відображенні множини A у множину B знайдуться два елементи з A , які мають один і той самий образ.

Приклад 11* Координати п'яти точок координатної площини є цілими числами. Доведіть, що серед усіх трикутників з вершинами в заданих точках є принаймні три, площи яких виражаються цілими числами.

Розв'язання

Насамперед зауважимо, якщо до координати однієї з вершин трикутника, площа якого виражено цілим числом, додати парне число, отримаємо трикутник із площею, що теж буде цілим числом.

Позначимо множину заданих точок $A = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$.





Додамо або віднімемо від координат заданих точок такі парні числа, щоб кожна координата заданої точки перетворилася на 0 або на 1. Отримаємо множину B , яка складається із чотирьох точок $\{(0; 0), (0; 1), (1; 0), (1; 1)\}$. Тоді, за принципом Діріхле, хоча б дві точки з множини A мають один і той самий образ у множині B .

Нехай вершини A_1 і A_2 перетворилися в одну точку множини B . Тоді трикутники $A_3A_1A_2$, $A_4A_1A_2$ і $A_5A_1A_2$ за образ матимуть відрізки, площа яких дорівнює нулю. Звідси (врахуйте зауваження, вказане на початку розв'язування) площині вказаних трьох трикутників дорівнюють нулю.

Щ. в. д.

ЗАВДАННЯ 9

- Шість школярів з'їли 7 цукерок. Доведіть, що хоча б один з них з'їв 2 цукерки.
- Сім'я Петренків складається з восьми осіб. Доведіть, що хоча б двоє з них народилися в один день тижня.
- У школі 740 учнів. Доведіть, що принаймні троє з них народилися в один і той самий день того самого місяця.
- Двадцять одному хлопцеві дали 200 горіхів. Доведіть, що як би ці горіхи не розподіляли між хлопцями, знайдеться двоє, які отримали однакову кількість горіхів.
- У двох класах 50 учнів. Доведіть, що хоча б четверо з них народилися одного місяця.
- У школі навчається 980 учнів. Доведіть, що хоча б у двох з них збігаються ініціали.
- Чи можна вивезти 50 каменів, вага яких 370 кг, 372 кг, ..., 468 кг, на 7 тритонних вантажівках?
- Числа від 1 до 10 записали в рядок у довільному порядку, до кожного з них додали номер місця розміщення числа. Доведіть, що принаймні дві суми закінчуються однаковою цифрою.
- Доведіть, що з довільних 12 натуральних чисел можна обрати два, різниця яких ділиться на 11.
- Доведіть, що серед 101 цілого числа можна обрати два, різниця яких ділиться на 100.
- У рядок записано п'ять довільних натуральних чисел. Доведіть, що або одне з них ділиться на 5, або ділиться на 5:
а) різниця двох із цих чисел; б) сума кількох із цих чисел.
- Доведіть, що для кожного $n \in N$ існує число, яке записується тільки за допомогою цифр 1 і 0 та ділиться на n .





13. Оберемо довільним чином п'ять осіб. Доведіть, що при наймні двоє з них мають однакову кількість знайомих серед обраних.
- 14*. У класі 25 учнів. Відомо, що серед будь-яких трьох з них є двоє друзів. Доведіть, що є учень, у якого не менше як 12 друзів.
- 15*. Доведіть, що для кожного $n \in N$ існує число, яке ділиться на n і в запису якого трапляються всі цифри: 0, 1, 2, ..., 9.
- 16*. Чи можна знайти 16 чисел, які задовольняють ту саму умову, що у прикладі 10 (с. 11)?
- 17*. Доведіть, що з довільних 52 натуральних чисел можна обрати два числа так, щоб або їхня сума, або їхня різниця ділиться на 100.
- 18*. Доведіть, що якщо числа a і b взаємно прості, то існує таке натуральне k , що $a^k - 1$ ділиться на b .
- 19*. Вісім школярів розв'язували 8 задач. З'ясувалося, що кожну задачу розв'язали по 5 учнів. Доведіть, що знайдуться такі два учні, що кожну задачу розв'язав хоча б один з них.
- 20*. У рядок виписали п'ять довільних натуральних чисел: a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 . Доведіть, що або одне з них ділиться на 5, або сума кількох чисел, які розміщені поряд, ділиться на 5.
- 21*. На аркуші в клітинку відмітили п'ять точок, що містяться у вузлах клітинок. Доведіть, що хоча б один з відрізків, що сполучає ці точки, проходить через вузол сітки.
- 22*. Доведіть, що серед будь-яких $n + 1$ різних натуральних чисел, не більших за $2n$, можна знайти два числа, з яких одне ділиться на друге без остачі.
- 23*. У країні Деякій кожен з 2012 депутатів парламенту дав тумака рівно одному колезі. Доведіть, що можна сформувати депутатську комісію з 670 депутатів, які не з'ясовували б стосунки вказаним способом.
- 24*. Петро розв'язує щодня не менше ніж одну задачу, протягом тижня – не більше 12 задач. Доведіть, що протягом року трапиться кілька таких послідовних днів, за які учень розв'яже 20 задач.
- 25*. На аркуші в клітинку позначили п'ять точок, що містяться в кутах клітинок. Доведіть, що хоча б один відрізок з кінцями у цих точках проходить через вузол клітинок (відмінний від заданих).

Дворівнева програма курсу за вибором «Працюємо на множині цілих чисел»

для учнів 9 (або 10) класу загальноосвітніх навчальних
закладів та класів профільного та поглибленого
вивчення математики (8 і 9 класи)

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

Уже у початковій школі діти знають ділення як дію, обернену до множення, вміють ділити натуральні числа з остачею, знають, що таке просте число, а пізніше знаходять НСД і НСК двох чисел, вивчають ознаки подільності. Проте на вступному іспиті (зовнішньому тестуванні) з математики або на математичній олімпіаді саме завдання з теорії чисел є найскладнішими для учнів та абітурієнтів.

Програма курсу є дворівневою за рівнем складності та відповідним годинним наповненням, *пропонує* систематизацію шкільного навчального матеріалу з таких тем, як поняття простого і складеного числа, ознаки подільності, ділення з остачею тощо, узагальнення й поглиблення знань учнів з елементарної теорії чисел, застосування вивченого до розв'язування задач. Для класів з поглибленим вивченням математики (окремих класів профільного навчання) пропонується розглянути теорію лишків і їх застосування при розв'язуванні задач, розв'язуванні невизначених рівнянь, застосування методів математичної індукції, принципу Діріхле, розв'язування задач підвищеної складності.

Даний курс сприяє формуванню в учнів абстрактного та алгоритмічного видів мислення, здатності до аналізу й узагальнення, пошукової евристичної діяльності, більш глибокого розуміння логіки математичних доведень, підготовці учнів до подальшого вивчення математики у ВТНЗ.

Як основний пропонується посібник «Працюємо на множині цілих чисел» Галини Апостолової*, у якому послідовно представлено навчальний матеріал даної тематики і дидактичний матеріал до нього.

Зауваження. Матеріал та годинне наповнення для курсу підвищеної рівня складності представлено у квадратних дужках.

Вивчення курсу розраховано на 32 навчальні години [64 навчальні години] – по 2 години на тиждень протягом одного півріччя у 9 або 10 класі [по 2 години на тиждень протягом навчального року в 9 або 10 класі].

* Окрім даного посібника, див. список рекомендованої літератури на с. 121.

Розподіл годин умовний, тематичне та дидактичне наповнення може корегуватися вчителем залежно від потреб і можливостей конкретної групи учнів.

Зміст навчального матеріалу	Навчальні досягнення учнів	Орієнтовний матеріал за посібником [1]
Тема 1. Означення і найпростіші властивості подільності – 8 год [12 год]. Прості та складені числа. Властивості подільності. Парність числа та її використання при розв'язуванні задач. Розкладання числа на прості множники і повний квадрат числа. Найбільший спільний дільник і найменше спільне кратне. [Функція Ейлера та її властивості.] Властивості подільності суми однакових непарних степенів, різниці однакових степенів. Розв'язування задач.	<i>Пояснює, що таке: просте й складене число; розклад числа на прості множники; властивості суми, різниці й добутку двох цілих чисел; розміщення чисел парних, непарних, кратних одному із чисел на числовій осі; НСК і НСД.</i> <i>Розв'язує задачі на використання вказаних властивостей цілих чисел.</i>	§ 1. Завдання 1
Тема 2. Запис числа і ознаки подільності – 8 год [10 год]. Позиційні та непозиційні системи числення. Двійкова система числення. [Арифметичні дії у системі числення з основою 2, 8, n .] Розв'язування задач. Гра в три купки камінців.] Десяткова система числення та ознаки подільності. Число Шахерезади і ознаки подільності на 7, 11 і 13. Розв'язування задач.	<i>Пояснює, що таке: позиційні та непозиційні системи числення, система числення з основою n.</i> <i>Наводить приклади запису числа у недесятковій системі числення (зокрема у двійковій).</i> <i>[Здійснює: перехід у записі числа між системами числення з різними основами; арифметичні дії із числами у двійковій системі числення.]</i> <i>Формулює й доводить: ознаки подільності на 2, 4, 8, 3, 9 [7, 11, 13].</i> <i>Застосовує вивчене у розв'язуванні задач.</i>	§ 2. Завдання 2

Продовження таблиці

<p>Тема 3. Арифметика останніх цифр числа і степінь цього числа – 3 год [5 год]. Періодичність у запису останньої цифри числа при піднесененні його до степеня. Розв'язування задач.</p>	<p><i>Пояснює</i> відповідні властивості чисел. <i>Застосовує</i> вивчене у розв'язуванні задач.</p>	<p>§ 3. Завдання 3</p>
<p>Тема 4. Діофантові рівняння (невизначені рівняння) – 3 год [6 год]. Історичні відомості. Алгоритм розв'язування лінійних діофантових рівнянь і його застосування. [Розв'язування діофантових рівнянь вищих степенів. Велика теорема Ферма. Спосіб розкладання на множники. Теорема Безу. Парність та подільність приходять на допомогу.] Розв'язування задач.</p>	<p><i>Розв'язує</i> найпростіші рівняння на множині цілих чисел (ліва частина – добуток лінійних виразів з невідомими, права – ціле число). <i>Пояснює</i> алгоритм розв'язування лінійних діофантових рівнянь. <i>Застосовує</i> вивчене до розв'язування задач, зокрема у тригонометрії.</p>	<p>§ 4. Завдання 4</p>
<p>Тема 5. Арифметика цифр у комбінаторних задачах – 3 год [6 год]. Правило множення. Правило додавання. Перестановки. [Розміщення. Комбінації. Властивості комбінацій. Біном Ньютона.] Розв'язування задач.</p>	<p><i>Пояснює</i> принцип розв'язування задач, пов'язаних з визначенням кількості чисел певної кількості знаків, цифри якого задовільняють певні умови. <i>Розв'язує</i> найпростіші задачі даної тематики. <i>[Застосовує</i> вивчене у розв'язуванні задач].</p>	<p>§ 5. Завдання 5</p>
<p>Тема 6. Ділення з остачею – 5 год [5 год]. Узагальнення поняття ділення з остачею. Прості числа та їх кількість – доведення Евкліда. Степінь числа й остачі. Розв'язування задач.</p>	<p><i>Пояснює</i>, що таке остача від ділення цілого числа на натуральне число, найпростіші властивості остач, різні способи розв'язування. <i>Розв'язує</i> найпростіші задачі на їх використання.</p>	<p>§ 6. Завдання 6</p>



Продовження таблиці

Тема 7. Арифметика остач за модулем – [6 год]. [Основні поняття. Властивості порівнянь. Порівняння і степінь числа. Мала теорема Ферма. Порівняння і ознаки подільності. Розв'язування задач.]		§ 7. Завдання 7
Тема 8. Метод математичної індукції – [5 год]. [База індукції. Індукційний перехід. Повна й неповна математична індукція. Доведення формул бінома Ньютона. Застосування методу математичної індукції при розв'язуванні задач на множині цілих чисел.]	<i>Пояснює</i> зміст методу математичної індукції. <i>Наводить приклади</i> його застосування.	§ 8. Завдання 8
Тема 9. Принцип Діріхле – [5 год]. [Принцип Діріхле. Узагальнений принцип Діріхле. Формульовання принципу Діріхле через поняття множин. Застосування принципу при розв'язуванні задач на множині цілих чисел.]	<i>Пояснює</i> зміст принципу Діріхле. <i>Наводить приклади</i> його застосування.	§ 9. Завдання 9
Резервні – 2 год [4 год].		

Методичні рекомендації щодо реалізації програми. Задачі пропонованої тематики для більшості учнів є нестандартними. Їх опрацювання – чудова підготовка мислення учнів до глибшого навчання математики (допрофільна орієнтація), для деяких учнів – підготовка до математичних змагань, а можливо, й подальшої наукової роботи. Проте це можливо лише за умови глибокого розуміння вчителем особливостей певної групи учнів та кожного з них окремо. Радимо таке.

- Розв'язуйте не всі задачі підряд, а обираєте ті, що зацікавлять саме ваших учнів і посильні саме вашим учням, проте підвищеної для них складності.
- Не намагайтесь розв'язувати якомога більше задач на одному занятті. Краще розв'язати одну-две задачі, проте відчути



«смак» їхніх ідей, ретельно обміркувати їх розв'язування, ніж поверхнево пробігтися повз десяток задач.

- Обговорюючи розв'язування певної задачі, зверніть увагу учнів на ідеї, що привели до розв'язку; чим вони схожі на ідеї розв'язування інших задач і чим відрізняються; розгляньте інші способи розв'язування.
- Проаналізуйте з учнями: як зміниться результат, якщо дещо змінити умову задачі; чи можна узагальнити твердження задачі; чи правильним буде твердження, обернене до твердження умови; які цікаві висновки випливають з даної задачі тощо.
- Допоможіть учням організувати роботу над задачею: виявити коло відповідних «ідей», зафіксувати математичною мовою певні міркування та логічні кроки пошуку розв'язку; обрати зручну для того форму запису та «мову».
- Час від часу повертайтесь до раніше опрацьованої тематики, пропонуйте учням дещо складніші задачі, ніж розглядалися раніше. Важливо, щоб таке повторення було не «колом», а «спіраллю». Тоді, окрім закріплення відповідних навичок мислення учнів, здійснюватиметься узагальнення та поглиблення їх знань.
- Важливим є не рівень задач, опрацьованих з учнями відносно, наприклад, олімпіадних завдань четвертого етапу учнівських змагань, а що нового отримав ваш учень по закінченні заняття.
- Головне, щоб в учнів з'явилося відчуття перемоги над задачею, відчуття успіху та задоволення від роботи, впевненості у собі. Саме це є основним підґрунтям формування в учнів пошукової активності, яка, за твердженням психологів, є головною метою та рушійною силою навчання.



Таблиця простих чисел, не більших за 6000

2	331	751	1217	1697	2221	2719	3299	3803	4357	4943	5503
3	337	757	1223	1699	2237	2729	3301	3821	4363	4951	5507
5	347	761	1229	1709	2239	2731	3307	3823	4373	4957	5519
7	349	769	1231	1721	2243	2741	3313	3833	4391	4967	5521
11	353	773	1237	1723	2251	2749	3319	3847	4397	4969	6527
13	359	787	1249	1733	2267	2753	3323	3851	4409	4973	5531
17	367	797	1259	1741	2269	2767	3329	3853	4421	4987	5557
19	373	809	1277	1747	2273	2777	3331	3863	4423	4993	5563
23	379	811	1279	1753	2281	2789	3343	3877	4441	4999	5569
29	383	821	1283	1759	2287	2791	3347	3881	4447	5003	5573
31	389	823	1289	1777	2293	2797	3359	3889	4451	5009	5581
37	397	827	1291	1783	2297	2801	3361	3907	4457	5011	5591
41	401	829	1297	1787	2309	2803	3371	3911	4463	5021	5623
43	409	839	1301	1789	2311	2819	3373	3917	4481	5023	5639
47	419	853	1303	1801	2333	2833	3389	3919	4483	5039	5641
53	421	857	1307	1811	2339	2837	3391	3923	4493	5051	5647
59	431	859	1319	1823	2341	2843	3407	3929	4507	5059	5651
61	433	863	1321	1831	2347	2851	3413	3931	4513	5077	5653
67	439	877	1327	1847	2351	2857	3433	3943	4517	5081	5657
71	443	881	1361	1861	2357	2861	3449	3947	4519	5087	5659
73	449	883	1367	1867	2371	2879	3457	3967	4523	5099	5669
79	457	887	1373	1871	2377	2887	3461	3989	4547	5101	5683
83	461	907	1381	1873	2381	2897	3463	4001	4549	5107	5689
89	463	911	1399	1877	2383	2903	3467	4003	4561	5113	5693
97	467	919	1409	1879	2389	2909	3469	4007	4567	5119	5701
101	479	929	1423	1889	2393	2917	3491	4013	4583	5147	5711
103	487	937	1427	1901	2399	2927	3499	4019	4591	5153	5717
107	491	941	1429	1907	2411	2939	3511	4021	4597	5167	5737
109	499	947	1433	1913	2417	2953	3517	4027	4603	5171	5741
113	503	953	1439	1931	2423	2957	3527	4049	4621	5179	5743
127	509	967	1447	1933	2437	2963	3529	4051	4637	5189	5749
131	521	971	1451	1949	2441	2969	3533	4057	4639	5197	5779
137	523	977	1453	1951	2447	2971	3539	4073	4643	5209	5783
139	541	983	1459	1973	2459	2999	3541	4079	4649	5227	5791
149	547	991	1471	1979	2467	3001	3547	4091	4651	5231	5801
151	557	997	1481	1987	2473	3011	3557	4093	4657	5233	5807
157	563	1009	1483	1993	2477	3019	3559	4099	4663	5237	5813
163	569	1013	1487	1997	2503	3023	3571	4111	4673	5261	5821
167	571	1019	1489	1999	2521	3037	3581	4127	4679	5273	5827
173	577	1021	1493	2003	2531	3041	3583	4129	4691	5279	5839
179	587	1031	1499	2011	2539	3049	3593	4133	4703	5281	5843
181	593	1033	1511	2017	2543	3061	3607	4139	4721	5297	5840
191	599	1039	1523	2027	2549	3067	3613	4153	4723	5303	5851
193	601	1049	1531	2029	2551	3079	3617	4157	4729	5309	5857
197	607	1051	1543	2039	2557	3083	3623	4159	4733	5323	5861
199	613	1061	1549	2053	2579	3089	3631	4177	4751	5333	5867
211	617	1063	1553	2063	2591	3109	3637	4201	4759	5347	5860
223	619	1069	1559	2069	2593	3119	3643	4211	4783	5351	5870
227	631	1087	1567	2081	2609	3121	3659	4217	4787	5381	5881
229	641	1091	1571	2083	2617	3137	3671	4219	4789	5387	5897
233	643	1093	1579	2087	2621	3163	3673	4229	4793	5393	5903
239	647	1097	1583	2089	2633	3167	3677	4231	4799	5399	5923
241	653	1103	1597	2099	2647	3169	3691	4241	4801	5407	5927
251	659	1109	1601	2111	2657	3181	3697	4243	4813	5413	5939
257	661	1117	1607	2113	2659	3187	3701	4253	4817	5417	5953
263	673	1123	1609	2129	2663	3191	3709	4259	4831	5419	5981
269	677	1129	1613	2131	2671	3203	3719	4261	4861	5431	5987
271	683	1151	1619	2137	2677	3209	3727	4271	4871	5437	
277	691	1153	1621	2141	2683	3217	3733	4273	4877	5441	
281	701	1163	1627	2143	2687	3221	3739	4283	4889	5443	
283	709	1171	1637	2153	2689	3229	3761	4289	4903	5449	
293	719	1181	1657	2161	2693	3251	3767	4297	4909	5471	
307	727	1187	1663	2179	2699	3253	3769	4327	4919	5477	
311	733	1193	1667	2203	2707	3257	3779	4337	4931	5479	
313	739	1201	1669	2207	2711	3259	3793	4339	4933	5483	
317	743	1213	1693	2213	2713	3271	3797	4349	4937	5601	

Додаток 3

Деякі степені чисел 2, 3 і 5

Число Степінь	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	8	16	32	64	128	256	512	1 024
3	9	27	81	243	729	2 187	6 561	19 683	59 049
5	25	125	625	3 125	15 625	78 125	390 625	1 953 125	9 765 625

Додаток 4

Таблиця факторіалів чисел від 1 до 16

$1! = 1$
$2! = 2$
$3! = 6$
$4! = 24$
$5! = 120$
$6! = 720$
$7! = 5040$
$8! = 40\ 320$
$9! = 362\ 880$
$10! = 3\ 628\ 800$
$11! = 39\ 916\ 800$
$12! = 479\ 001\ 600$
$13! = 6\ 227\ 020\ 800$
$14! = 87\ 178\ 291\ 200$
$15! = 1\ 307\ 674\ 368\ 000$
$16! = 20\ 922\ 789\ 888\ 000$

СПИСОК використаної та рекомендованої літератури

1. Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В. Ленинградские математические кружки. – Киров: АСА, 1994.
2. Галицкий М.П., Гольдман А.М., Завиця Л.И. Сборник задач по алгебре для 8–9 классов: Учеб. пособие для учащихся шк. и классов с углубл. изуч. математики. – М.: Просвещение, 1982. – 271 с.
3. Савин А.П. Занимательные математические задачи. – М.: АСТ, 1995. – 176 с.
4. Степанов С.А. Сравнения. – М.: Знание, 1975. – 64 с.
5. Михайлович Ш.Х. Теория чисел. – М.: Высш. шк., 1962. – 260 с.
6. Воробьев Н.Н. Признаки делимости. – М.: Физматгиз, 1963. – 72 с.
7. Гельфанд С.И., Гервер М.Л., Кириллов А.А., Константинов Н.Н., Кушниренко А.Г. Задачи по элементарной математике. Библиотека физико-математической школы. – М.: Наука, 1965. – 176 с.
8. Серпинский В. 250 задач по элементарной теории чисел. – М.: Просвещение, 1968. – 160 с.
9. Серпинский В. Что мы знаем и чего не знаем о простых числах. – М.: ФМ, 1963.
10. Фомин С.В. Системы счисления. – М.: Наука, 1980. – 48 с.
11. Берман Г.Н. Число и наука о нем. – М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1948. – 164.
12. Ивлев Б.М., Абрамов А.М., Дудницын Ю.П., Шварцбурд С.И. Задачи повышенной трудности по алгебре и началам анализа. – М.: Просвещение, 1990. – 48 с.
13. Касаткин В.Н. Новое о системах счисления. – К.: Вища шк., 1982. – 96 с.
14. Шкллярский Д.О., Ченцов Н.Н., Яглом И.М. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Арифметика и алгебра. – М.: Наука, 1977. – 384 с.
15. Бельский А.А., Калужин Л.А. Деление с остатком. – К.: Вища шк., 1977.
16. Школа в «Кванте»: Арифметика и алгебра / Под ред. А.А. Егорова. – М.: Бюро квантум, 1994.
17. Ясінський В.А. Задачі математичних олімпіад та методи їх розв'язування. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2005.
18. Сивашинский И.Х. Задачи по математике для внеклассных занятий. – М.: Просвещение, 1968. – 312 с.
19. Вишненський В.А., Ядренко М.Й. Виbrane математичні задачі. – К.: Вища школа, 1974. – 108 с.
20. Маланюк М.П., Лукавецкий В.И. Олимпиады юных математиков: Пособие для учителей. – К.: Рад. шк., 1985. – 68 с.
21. Федак І.В. Готуємося до олімпіад з математики. – Кам'янець-Поділ.: Абетка, 2006. – 420 с.
22. Сарана О.А., Ясінський В.В. Конкурсні задачі підвищеної складності з математики. – К.: НТУУ «КПІ», 2005. – 260 с.

ВІДПОВІДІ ТА ПОРАДИ

ЗАВДАННЯ 1

- 1.1.** Ні. *Порада.* Із чотирьох доданків два числа парні і два непарні. Тому сума всіх чотирьох чисел – число парне (більше за 2).
- 1.2.** Ні. *Порада.* Сума трьох непарних чисел – число непарне, а 30 – число парне.
- 1.3.** Ні. *Порада.* Сума парної кількості непарних чисел – парна.
- 1.4.** Ні. *Порада.* Візьміть до уваги зауваження, яке наведено перед задачами цього завдання. Сума п'яти парних і п'яти непарних чисел – непарна, отже, не може дорівнювати нулю – числу парному.
- 1.5.** Ні. *Порада.* Маємо суму 50 чисел, з яких 25 – парні, а 25 – непарні. Отже, шукана сума буде непарною.
- 1.6. а)** 4 дільники: 1, p , q , pq ; **б)** $6 = (2 + 1)(1 + 1)$; **в)** 9; $(n + 1)(m + 1)$.
- 1.7. а)** a має 108 дільників, b має 96 дільників; **б)** $2^5 \cdot 5^3$; **в)** $2^8 \cdot 3 \cdot 5^7 \cdot 7^2$.
- 1.8. Порада.** Скористайтеся ознакою подільності на 3 і властивостями подільності (1)–(2), (5).
- 1.9. а)** *Порада.* Врахуйте: якщо n – число непарне, то число перед ним і наступне за ним на слововій осі – парні; **б)–г)** *Порада.* Врахуйте властивість (9).
- 1.10. а)** *Порада.* Запишіть $a^2 + b^2$ як $(a + b)^2 - 2ab$; **б)** *Порада.* Розкладіть вираз на множники і скористайтеся порадою до а).
- 1.11.** $a^4 + 4b^4 = (a^2 + 2b^2)^2 - 4a^2b^2 = (a^2 + 2ab + 2b^2)(a^2 - 2ab + 2b^2)$.
- 1.12. Порада.** Додайте (і відніміть) число $ab + cd$ і групуванням виділіть множник $a + c$.
- 1.13. а)** Так; **б)** так; **в)** ні; **г)** так. *Порада.* Скористайтеся властивостями (1)–(7).
- 1.14.** Так. *Порада.* Запишіть даний вираз у вигляді $(a + b)^2 - c^2$.
- 1.15.** 2; 3; 19. *Порада.* Нехай $z = x^3 - y^3$. Тоді $z = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$. З умови, що z – просте, маємо $x - y = 1$. Звідси $x = 3$, $y = 2$ (бо x , y – прості), $z = 19$.
- 1.16.** 13. *Порада.* Нехай було x мавп і кожна з них зібрала по y горіхів. Кожна кинула по $x - 1$ горіху. Тоді Мауглі отримав $x(y - x + 1) = 33$ горіхи. Оскільки обидва множники в лівій частині рівності цілі, а другий з них не 1, то x може дорівнювати або 3, або 11. В обох випадках отримаємо $y = 13$.
- 1.17.** 12. *Порада.* Знайдіть НСД (576; 180; 9060).
- 1.18.** Так. *1.19. Ні. Порада.* Нехай $a > b$ і НСД (a ; b) = d . Тоді $(a - b) : d$. За умовою $a - b \neq 0$, тоді $a - b \geq d$.
- 1.20.** У 4 рази. *Порада.* Якщо одне число ділиться на друге, то більше число є найменшим спільним кратним цих чисел, а менше – найбільшим спільним їх дільником.
- 1.21.** Так. *1.22. Ні. Порада.* Наведемо контрприклад: НСД (40; 12) = НСД (12; 20) = 4, але НСД (40; 20) = 20.
- 1.23. 1. Порада.** За умовою дані числа a і b – непарні, $b = a + 8$. Тоді, якщо a має непарний дільник, то число $a + 8$ його не має.
- 1.24.** 10. *Порада.* НСК (a ; $10a$) : НСД (a ; $10a$) = $= 10a : a = 10$.
- 1.25.** НСК = $15y$, НСД = y .
- 1.26. 3. Порада.** Врахуйте, що сума цифр кожного з даних чисел кратна числу 3, але не кратна числу 9; різниця $123\ 465 - 123\ 456 = 9$, тобто НСД є дільником числа 9.
- 1.27. Порада.** Скористайтеся властивістю (9).



1.28. Порада. Скористайтеся властивістю (9). **1.29. Порада.** Скористайтеся властивістю (9). **1.30. Порада.** Розгляньте всі можливі випадки подільності чисел m і n на 2. **1.31. Порада.** Якщо одне з даних чисел кратне числу 3, то добуток чисел ділиться на 3. Якщо жодне з даних чисел не ділиться на три, то кожне з них можна записати у вигляді $3n + 1$ або $3n + 2$. Розгляньте всі можливі випадки. **1.32. Порада.** $(2a+1)^2 + (2b+1)^2 = 4(a^2 + a + b^2 + b) + 2$ – перший доданок кратний числу 4, а другий – ні. **1.33. Ні. Порада.** $(a - 1) + a + (a + 1) + (a + 2) = 2(2a + 1)$. Другий множник – непарний, отже, вказана сума містить простий множник 2 у непарному степені. **1.34. а) $p - 1$; б) $p^2(1 - \frac{1}{p})$.** *Порада.* Див. приклад 14. **1.35. Порада.** Див. приклад 16. **1.36. 35. Порада.** $6 + 4 + 6 \cdot 4 + 1 = 35$.

1.37. 16 м². Порада. Позначте довжини сторін квадратних кімнат як x і y , де $x^2 = y^2 + 7$. Тоді $(x - y)(x + y) = 7$. Звідси $x - y = 1$, $x + y = 7$; $x = 4$, $x^2 = 16$. **1.38. Порада.** Див. приклад 7. **1.39. а) 2; б) 3; в) 2; г) 5. Порада.** Див. приклад 11. **1.40. Порада.** Див. приклади 12 і 13. **1.41. 65. Порада.** Позначте шукане число як x . Тоді $x + 16 = n^2$, $x - 16 = m^2$, $n^2 - m^2 = 32$, $(n - m)(n + m) = 32 = 1 \cdot 32 = 2 \cdot 16 = 4 \cdot 8$. Розгляньте три можливі випадки: $n - m = 1$, $n + m = 32$; $n - m = 2$, $n + m = 16$; $n - m = 4$, $n + m = 8$. **1.42. Порада.** Скористайтеся формулою скороченого множення для $a^n - b^n$.

1.43. Порада. Задані числа належать множині $\{3k - 1; 3t + 1\}$. Розгляньте всі можливі випадки. **1.44. Порада.** Скористайтеся методом від супротивного. **1.45. Порада.** Нехай d – спільний дільник даних чисел a і b . Тоді $32 = (a - b) : d$. Звідси d , як дільник 32, є одним із чисел $\{2; 4; 8; 16; 32\}$, тобто числом парним. Отже, a і b – парні, що суперечить умові. **1.46. 15 і 12. Порада.** Якби кожний доданок збільшили в 3 рази, то сума дорівнювала б 81, різниця $111 - 81 = 30$ є подвоєним першим доданком. **1.47. Ні. Порада.** За умовою $a^2 - b^2 = 6666$. Тоді a і b або одночасно парні, або непарні. В обох випадках обидва числа $a + b$ і $a - b$ – парні, отже, $(a^2 - b^2) : 4$, а 6666 не ділиться на 4. **1.48. Порада.** Скористайтеся методом від супротивного. **1.49. Порада.** Випадок, коли c кратне числу 3, розглядався у 1.47. Розгляньте випадок, коли числа c і a не кратні числу 3, і скористайтеся порадою до 1.31. **1.50. Дріб скороочується на 3. Порада.** Див. приклад 24. **1.51. $a \in \{\pm 2; 6; \pm 8; 10; 16\}$. Порада.** Див. приклад 22. **1.52. $a \in \{2; 0; -1\}$. Порада.** Див. приклад 22 і не забудьте, що a – ціле, а дріб – натуральне число. **1.53. а) $n \in \{0; 4; -2; -6\}$.**

Порада. Врахуйте, що $\frac{n^2 - n + 3}{n + 1} = n - 2 + \frac{5}{n + 1}$; **б) $n \in \{0; 1\}$. Порада.**

Врахуйте, що $\frac{2n^2 - 3n + 2}{2n - 1} = n - 1 + \frac{1}{2n - 1}$. **1.54. 3×7 м і 3×5 м.**





Порада. Позначте довжини сторін першої кімнати в метрах як a і b .

Тоді $ab = 2(a + b) + 1$, $b = \frac{2a + 1}{a - 2} = 2 + \frac{5}{a - 2}$. Щоб b було цілим, $a - 2$

може набувати лише значення 1 або 5. Маємо $a = 3$, $b = 7$ або $a = 7$, $b = 3$. Аналогічно для другої кімнати отримаємо розміри 3 і 5.

1.55. а) $k = 3$. **Порада.** Зверніть увагу на те, що числа $k + 1$ і $k - 1$ повинні бути степенями числа 2; **б)** $k = 2$. **Порада.** Скориставшись формулами скороченого множення, виділіть у чисельнику множник 3;

в) $k = 17$. **Порада.** Позначте $k - 1 = t$, тоді $t(t + 2) : 2^5$. Звідси $t = 2^n$, $t(t + 2) = 2^{n+1}(2^{n-1} + 1) : 2^5$. Найменше значення n , що задовільняє цю умову, – 4.

1.56. Порада. Поділіть чисельник і знаменник дробу на n і методом від супротивного знайдіть число, на яке скорочується дріб.

1.57. Порада. Скористайтеся формулами (16) і (17); у **в**) врахуйте, що $3^{3n} = 27^n$.

1.59. Порада. Розгляньте $8^{2n} - 3^{2n}$ і скористайтеся властивістю (18).

1.60. а) **Порада.** Виділіть у заданому виразі повний квадрат; **б)** **Порада.** Розгляньте даний вираз як суму кубів і скористайтеся 1.60 а).

1.61. Порада. Доведіть, що $(m - 3)(m - 1)(m + 1)(m + 3) + 16 = (m^2 - 5)^2$.

1.62. Одне. Порада. Зобразіть відповідні множини діаграмою Венна.

1.63. Ні. Порада. Числа ягід на двох сусідніх кущах різної парності. Усього маємо 8 чисел, отже, серед них – чотири парних і чотири непарних. Сума всіх вказаних чисел – загальна кількість ягід – парна й не може бути непарною.

1.64. Порада. Розглянемо спочатку випадок, коли дані числа взаємно прості. Доведемо, що в цьому випадку abc є повним квадратом.

Нехай p – просте число і c ділиться на p^n . З рівності $ab = -c(a + b)$ маємо, що одне із чисел a , b ділиться на p^n , а друге не ділиться на p (бо a , b , c – взаємно прості). Тоді abc ділиться на p^{2n} .

Аналогічними міркуваннями отримаємо, що кожний простий дільник числа abc міститься в цьому добутку в парному степені. У випадку, коли дані числа мають спільний дільник, він буде міститися в добутку abc у кубі.

1.65. Ні. Порада. На шаховій дощці 64 клітинки. За умовою маємо два види клітинок різної парності, тобто їхня сума непарна і не може дорівнювати 64.

1.66. Виграє той, хто розпочинає гру (незалежно від подальшої стратегії).

Порада. Хоч би в якій послідовності гравці не ламали шоколадку, однаково наприкінці гри вони отримають парну кількість шматочків.

Тому виграє той, після чийого ходу буде утворюватися парна кількість шматочків шоколадки, тобто перший гравець.

1.67. Не всі. Порада. Кількість шматочків кожного разу подвоювалася, тому загальна кількість шматочків має бути степенем двійки.

Число 120 ділиться на 3, тому знайдено не всі шматочки.

1.68. Ні. Порада. Візьміть до уваги, що всі прості числа, за винятком двійки, – непарні. Тоді суми чисел рядка й стовпчика, що містять двійку, – непарні, а інші – парні (за умовою маємо квадрат 6×6).

1.69. Ні. Порада. Візьміть до уваги: сума шести одинакових чисел парна; сума заданих чисел непарна; додавання до останньої суми



$1 + 2 + 3 = 6$ не змінює її парність. **1.70.** Шоколадка. *Порада.* Візьміть до уваги, що число шоколадок завжди буде парним. **1.71. Ні.** *Порада.* Поставимо у відповідність правильній позиції келиха і позиції догори дном числа 1 і 2. Якщо всі келихи стоять правильно, то сума таких чисел буде 12 – парною. Задане умовою положення келихів відповідає загальній сумі $11 + 2 = 13$ – числу непарному. При перевертанні двох довільних келихів можливі три випадки: дві одиниці перетворюються на дві двійки; дві двійки перетворюються на дві одиниці; одиниця і двійка перетворюються відповідно на двійку й одиницю. У всіх випадках це не впливає на парність суми, що розглядається. Тобто непарне число перетворити на парне і поставити келихи правильно пропонованим способом неможливо. **1.72.** Другий гравець. Кожним ходом він повинен додавати число, що доповнює число першого до 6.

ЗАВДАННЯ 2

- 2.1.** З основою 4. **2.2.** а) $(202)_7$; б) $(1313)_7$; в) $(1000)_7$; г) $(300)_7$; д) $(10300)_7$. **2.3.** а) 100; б) 86; в) 3287.

2.4.

	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	10	12	14
3	0	3	10	13	20	23
4	0	4	12	20	24	32
5	0	5	14	23	32	41

- 2.5.** а) $(42714)_8$; б) $(3125)_6$; в) $(145244)_6$. *Порада.*

$$\begin{array}{r}
 \times (352)_6 \\
 \times (245)_6 \\
 \hline
 + 3124 \\
 2332 \\
 \hline
 1144 \\
 \hline
 (145244)_6.
 \end{array}$$

- г) Частка $(1101)_3$, остача $(22)_3$. *Порада.*

$$\begin{array}{r}
 (120101)_3 | (102)_3 \\
 \underline{- 102} \quad (1101)_3 \\
 \hline
 111 \\
 - 102 \\
 \hline
 201 \\
 - 102 \\
 \hline
 (22)_3.
 \end{array}$$



2.6. З основою 7. **2.7.** 8. *Порада.* Нехай основою системи числення Миколи буде a . Тоді запис у його зошиті означає $(a + 3)^2 = a^2 + 7a + 1$. Звідси $a = 8$.

2.8. З основою 6. *Порада.* Нехай основа шуканої системи x . Тоді $x^2 = (2x + 4) + (3x + 2)$, $x^2 - 5x - 6 = 0$, $x_1 = 6$ – розв'язок, $x_2 = -1$ – сторонній корінь (основа системи числення натуральне число).

2.9. 82. *Порада.* Для числа \overline{ab} за умовою: $a + b = 10$ і $(10a + b) - (10b + a) = 54$. Маємо систему рівнянь $a + b = 10$ і $a - b = 6$.

2.10. 54 і 45. *Порада.* Позначте шукані числа як \overline{ab} і \overline{ba} . Тоді маємо: $(10a + b) - (10b + a) = a + b$, $8a = 10b$, $4a = 5b$. Враховуючи, що a і b – цифри, отримаємо $a = 5$, $b = 4$.

2.11. 3 337 777. *Порада.* Запишемо шукане число як $\overline{aaabbbb}$. Тоді $3a + 4b = 10a + b$, $7a = 3b$. Враховуючи, що a і b – цифри, отримаємо $a = 3$, $b = 7$.

2.12. 79. *Порада.* Візьміть до уваги, що у даному числі \overline{ab} за умовою $a + b = 16$, $10a + (16 - a) = 10(16 - a) + a = 18$.

2.13. 24. **2.14.** 54. **2.15.** 21 або 12. *Порада.* Позначте шукане число як \overline{ab} . За умовою маємо два рівняння: $a^3 + b^3 = 243$, $(a + b)ab = 162$. Якщо поділити перше рівняння на друге, отримаємо $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{5}{2} = 2 + \frac{1}{2}$. Звідси $a = 2$, $b = 1$, або $a = 1$, $b = 2$.

2.16. 764. **2.17.** 77 або 86. *Порада.* Позначте шукане число як \overline{ab} . Тоді $a + b = 14$; $10a + b + 46 = 9a + (a + b) + 46 = 9a + 60 = A$, де A – число, добуток цифр якого дорівнює 6. Маємо, що $A \geqslant 69$. Тоді A не може бути двоцифровим (бо його цифрами можуть бути лише пари $\{1; 6\}$, $\{2; 3\}$). Цифри трицифрового числа A з множини $\{1; 2; 3\}$. Маємо, що $A \leqslant 141$. Тоді $A = 123$, або $A = 132$. Отримаємо відповідно $a = b = 7$, $a = 8$, $b = 6$.

2.18. 12 і 37. *Порада.* $4444 = 44 \cdot 101$ і не задоволяє умову (бо 101 – просте число). Тоді вказаний добуток дорівнює $444 = 3 \cdot 4 \cdot 37$. Єдино можлива комбінація двоцифрових співмножників 12 і 37.

2.19. $3 \cdot 7 \cdot 37 = 777$. *Порада.* $a \cdot \overline{ac} = \overline{ccc} : c = 111$. Але 111 як добуток одноцифрового числа на двоцифрове можна подати лише у вигляді $3 \cdot 37$. Отже, $a = 3$, $c = 7$.

2.20. 0; 27. *Порада.* Нуль – очевидний розв'язок. Більше одноцифрових чисел, що задовольняють умову, бути не може. Для двоцифрових чисел маємо: $10a + b = 3(a + b)$, $7a = 2b$ і маємо число 27. Трицифрове число більше або дорівнює 100, а потроєна сума його цифр не перевищує $27 \cdot 3 = 81$. Аналогічно, і більшої кількості цифр ніж 3, шукане число мати не може.

2.21. *Порада.* Пригадайте ознаку подільності на 3.

2.23. *Порада.* Див. приклад 10.

2.24. Ні. *Порада.* Врахуйте, що число $5^k + 1$ не кратне числу 4 (чому?), а число $5^n - 1$ – кратне числу 4 (чому?).

2.26. *Порада.* Див. приклад 10.

2.27. $a = 5$.

2.28. *Порада.* Див. приклад 13.

2.29. *Порада.* Для числа $10x + y$ маємо рівняння $10x = y(x - 1)$. Візьміть до уваги, що x і $x - 1$ взаємно прості (властивість (11) § 1).

2.30. Ні. *Порада.* Врахуйте: за ознакою подільності дане число кратне числу 3; якщо це квадрат цілого числа, то $a^2 : 9$. Пригадайте ознаку подільності на 9.

2.31. Ні. *Порада.* Сума цифр



числа 300, отже, воно ділиться на 3, але не ділиться на 9. **2.32.** Ні. *Порада.* Сума цифр числа буде кратна числу 45, отже, число кратне числу 9, а степінь двійки ділиться на 9 не може. **2.33.** а) $10^2 = 100$. *Порада.* Розгляньте вираз, рівносильний даному: $\overline{acc} : \overline{ac} = \overline{ac}$; б) $99 + 1 = 100$. *Порада.* Візьміть до уваги, що двоцифрове число \overline{aa} додали до одноцифрового b . Тоді їхня трицифрова сума \overline{bcc} може починатися тільки з одиницею: $b = 1$. Сума $\overline{aa} + 1$ буде трицифровим числом лише у випадку, коли $\overline{aa} = 99$; в) $98 - 89 = 9$. *Порада.* Різниця $\overline{ab} - \overline{ba}$ кратна числу 9 (див. приклад 10) і одноцифрова, отже, $a = 9$; b може дорівнювати лише 8, бо при $b < 8$ різниця $\overline{ab} - \overline{ba}$ – число двоцифрове. **2.35.** Ні. *Порада.* Квадрат парного числа ділиться на 4 і має парну цифру одиниць. Тоді останньою цифрою з пропонованих умовою може бути лише 4, а передостанньою 1, 5, 9. Маємо, що: 14, 54, 94 не ділиться на 4. **2.36.** Ні. *Порада.* Перша цифра множеного може бути тільки одиницею (інакше зворотне число матиме більше цифр, ніж дві). Добуток цілого числа на 6 – число парне і не може закінчуватися одиницею. **2.37.** 195; 156; 117. *Порада.* Зрозуміло, що шукані числа не можуть бути одноцифровими. Вони не можуть бути і двоцифровими, бо тоді за умовою для числа \overline{ab} виконується $10a + b = 13(a + b)$ або $3a + 12b = 0$. Для трицифрового числа \overline{abc} маємо: $100a + 10b + c = 13(a + b + c)$, $29a = b + 4c$. Перебором отримаємо три розв'язки: 195; 156; 117. Неважко бачити, що шукані числа не можуть мати чотири або більше цифр, бо сума їхніх цифр набагато менша від самого числа. **2.38.** 11; 22; 33; 44; 55; 66; 77; 88; 99; 12; 24; 36; 48; 15. *Порада.* Число $10a + b$ ділиться на a і b , якщо $a = b$, або $2a$ ділиться на b , або $5a$ ділиться на b . **2.39.** 54. *Порада.* Цифра десятків 5 (бо 10 – подвоєна цифра десятків). Трицифрове число $\overline{59a}$ кратне числу 11. $59a = 550 + 4a$ ділиться на 11. Тоді $a = 4$. **2.40.** *Порада.* Запишіть задане число n у вигляді $n = 10^{k+1}a + 10^kb + c$, де b – цифра (тобто $b \in \{0; 1; \dots; 9\}$), $\{a; c\} \in N$, причому $c < 10^k$. Якщо викреслити цифру b , отримаємо число $m = 10^ka + c$, що буде кратне числу d , якщо $n - m = 10^k(9a + b) : d$. 1) У випадку, коли $d : 9$, візьмемо за $b = 9$, $a = \frac{d - b}{9}$. (Тоді $9a + b = d : d$.) 2) У випадку, коли d не кратне числу 9, візьмемо за b остатчу від ділення d на 9 (це число між 1 і 9, тобто може бути цифрою b), а за $a = \frac{d - b}{9}$. Тоді $9a + b = d : d$. Залишилося підібрати такі c і k , щоб $10^{k-1} > d$. Маємо $10^ka + 10^{k-1} = d \cdot q + r$ і обираємо за $c = 10^{k-1} - r > 0$. Тоді $10^ka + c = dq : d$. **2.41.** *Порада.* Запишіть дане число у вигляді $(2000 - 1)^6$ і доведіть, що десятковий запис числа має рівно 20 розрядів, тобто 20 значущих цифр. Нехай серед них немає трьох однакових. Тоді цифри від 0 до 9 у запису цього числа трапляються по 2 рази і сума цифр та-



кого числа дорівнює 90, тобто воно ділиться на 3 і 9. Проте число 1999 не ділиться на 3 і на 9 – маємо протиріччя. **2.42.** 36. *Порада.* Позначимо цифри шуканого числа як a , b , c , d . Тоді числа $(a + b) - (c + d)$ і $(a + c) - (b + d)$ закінчуються нулем. Отже, їхня сума $2(a - d)$ і різниця $2(b - c)$ теж закінчуються нулем. Тоді дві довільні цифри числа або рівні, або відрізняються на 5; в останньому випадку число має дві однакові пари чисел. Пар цифр, що відрізняються на 5, маємо лише п'ять: 0 і 5; 1 і 6; 2 і 7; 3 і 8; 4 і 9. З кожної пари, окрім першої, можна скласти 6 різних чотирицифрових чисел. Наприклад, з пари 1 і 6: 1166, 1616, 1661, 6116, 6611, 6161. З пари 0 і 5 можна скласти лише три числа (бо нуль не може стояти на першому місці): 5005, 5500, 5050. Отже, маємо: 9 чисел з однакових цифр; $4 \cdot 6 + 3 = 27$ чисел, у яких дві рівні цифри. Разом $9 + 27 = 36$ чисел. **2.43.** 2345; 5432; 4523. *Порада.* Перше число 2345, бо якщо воно більше, то сума трьох чисел більша за 12 300, а якщо менше, то вказана сума менша від 12 300. Звідси отримаємо друге число 5432 і третє як різницю $12\ 300 - 2345 = 5432 = 4523$. **2.44.** 8899. *Порада.* Якщо число не закінчується 9, то сума цифр наступного за ним числа більша за суму його цифр на 1. Тому будемо розглядати лише числа, що закінчуються 9. Якщо число закінчується 9 (але не 99), то сума цифр наступного за ним числа менша від суми його цифр на 8, що також не відповідає умові. Якщо число закінчується 99 (але не 999), то сума цифр наступного за ним числа менша від суми його цифр на 17. Тоді якщо вказане число ділиться на 17, то і наступне за ним кратне числу 17. Зауважимо, що таке наступне число закінчується двома нулями. Найменше з таких чисел, що закінчується двома нулями, а suma двох перших чисел дорівнює 17, є число 8900. Тоді шукане число дорівнює $8900 - 1 = 8899$. **2.45.** *Порада.* Скористайтеся другою ознакою подільності на 11. **2.47.** Так. *Порада.* Скористайтеся другою ознакою подільності на 11. **2.48.** а) Ні; б) так. **2.49.** а) Так; б) ні. **2.50.** а) Так; б) ні; в) ні; г) так; д) так. **2.51.** 9. *Порада.* Число a не більше за $2012 \cdot 9 = 18\ 108$. Тоді $b < 5 \cdot 9 = 45$. Звідси $c = 9$. **2.52.** *Порада.* Запишіть шукане число x як $10a + b$. Тоді утворене число y дорівнює $a + 4b$. Помножимо утворене число на 10 і віднімемо від нього задане, маємо: $10y - x = 39b : 13$, $10y = x + 39b$. Звідси випливає правильність твердження умови. **2.53.** Другий гравець дотримується такої стратегії: друга трійка чисел повинна повторювати першу трійку, четверта – третю. Тоді одержане число ділиться на 1001, а отже, і на 77. **2.54.** Ні. *Порада.* Нехай таке число abc ($a > b > c$) існує, $abc : 11 = xy$. Тоді $(10x + y) \cdot 11 = 100a + 10b + c$, $100x + 10(x + y) + y = 100a + 10b + c$. Якщо $x + y < 10$, то $a = x > b = x + y$, чого бути не може (x і y цифри). Якщо $x + y > 10$, то $a = x + 1 > b = x + y - 10 > c = y$, чого бути не може, бо $y + (x - 10)$ не може перевищувати y . **2.55.** 111...110, всього 162 одиниці. *Порада.* Спочатку покажіть,



що числа можна розмістити вказаним чином (хоча б одним способом). Візьміть до уваги, що сума цифр, які стоять в однакових розрядах найбільшого та найменшого чисел, дорівнює 10. Тоді шукане число має вигляд 111...110, всього 162 одиниці.

ЗАВДАННЯ 3

- 3.1. Ні. Порада.** Див. таблицю на початку параграфа. **3.2. а) 9; б) 1.** *Порада.* Непарні степені числа 9 закінчуються 9, а парні – 1.
- 3.3. а) 4; б) 4; в) 4.** *Порада.* Візьміть до уваги, що $6 = 4 + 2$, $18 = 4 \cdot 4 + 2$, $50 = 4 \cdot 12 + 2$ та властивість (3.1). **3.4. а) 7.** *Порада.* $77 = 4 \cdot 19 + 1$; **б) 3.** *Порада.* $777 = 4 \cdot 502 + 3$; **в) 7.** *Порада.* $77 = 4 \cdot 19 + 1$; **г) 1.** *Порада.* $2012 = 4 \cdot 502 + 4$; **д) 1.** *Порада.* $777^{2012^{77}} = (777^{2012})^{77}$ і див. пораду до 3.4 г). **3.5. а) 3.** *Порада.* $2013 = 4 \cdot 503 + 1$; **б) 9.** *Порада.* $6 = 4 + 2$, отже, 3^6 закінчується тією самою цифрою, що і 3^2 , тобто 9. Непарний степінь числа 9 закінчується 9; **в) 1.** *Порада.* Див. пораду до 3.4 г). **3.6. а) 3.** *Порада.* Візьміть до уваги, що доданки закінчуються цифрами 1, 6 і 6 відповідно; **б) 9.** **3.7. Порада.** За наведеною раніше таблицею бачимо, що четвертий степінь цілого числа може закінчуватися лише цифрами 0, 1, 5, 6. **3.8. Порада.** Врахуйте, що $64 = 4 \cdot 15 + 4$. Тоді 64^{64} має за останню цифру 6. **3.9. Нулем.** *Порада.* Якщо a і b – непарні, то $a + b$ число парне. Якщо парне число ділиться на 5, то воно закінчується нулем. Оскільки $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$, то число $a^3 + b^3$ також закінчується нулем. **3.10. Порада.** Врахуйте періодичність, з якою повторюється остання цифра числа при його піднесенні до степеня. **3.11. Порада.** Див. приклад 8. **3.12. а) 7.** *Порада.* Врахуйте, що $9^{2n} = 81^n$; **б) 7;** **в) 2,** якщо n – парне; **0,** якщо n – непарне. **3.13. а) 6; б) 1.** **3.14. Так.** *Порада.* $21 : 3$, тоді $21^{39} : 9$; $39 : 3$, тоді $39^{21} : 9$. Отже, $(21^{39} + 39^{21}) : 9$. 21^{39} закінчується одиницею, 39^{21} закінчується дев'яткою. Отже, їх сума закінчується нулем і ділиться на 5. **3.15. Порада.** Див. приклад 4. **а) $n \in \emptyset$.** *Порада.* Врахуйте, що четвертий степінь числа може закінчуватися тільки цифрами 1, або 5, або 6. Число 1008^{8n} закінчується цифрою 6, а число 1007^{2n-1} – або 3, або 9. Тоді остання цифра заданої суми або 3, або 9; **б) $n \in \emptyset$.** *Порада.* Розгляньте випадки: n – парне, тобто $2n$ ділиться на 4; n – непарне, тобто $2n$ не ділиться на 4. **3.16. Порада.** Остання цифра числа A^3 залежить лише від останньої цифри числа A . Випишіть ці цифри табличкою й переконайтеся в правильності твердження задачі. **3.17. Порада.** $2013 = 4 \cdot 503 + 1$. Тоді довільне натуральне число m у 2013 степені закінчується тією самою цифрою, що і число m . Запишемо задане число у вигляді $((n+1)^{2013} - (n+1)) + (n^{2013} - n) + ((n-1)^{2013} - (n-1))$. Маємо суму трьох чисел, кожне з яких закінчується нулем. Отже, число A закінчується нулем і кратне числу 10. **3.18. Порада.** За формулою (17) § 1 маємо: $11^{10} - 1 = (11-1)(11^9 + 11^8 + \dots + 11 + 1)$.



Перша дужка дорівнює 10. У другій дужці маємо 10 доданків, кожний з яких закінчується одиницею, отже, ця сума закінчується нулем. **3.19.** Ні. *Порада.* Візьміть до уваги, що квадрати даних чисел можуть закінчуватися лише 1, 4, 9, 6. Залишилося провести невеликий перегляд варіантів. **3.20.** 19. *Порада.* Кубічний корінь із чотирицифрового числа – число двоцифрове. Куб числа закінчується цифрою 9 лише у випадку, коли саме число закінчується цифрою 9. Число 19 – задовільняє умову; число 29 – ні, бо $29^3 > 10\ 000$. **3.21.** Ні. *Порада.* Сума цифр числа, що містить порівну всі цифри від 0 до 9, кратна сумі $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$. Тоді таке число повинно бути кратним числу 9, а 2 в довільному цілому степені не може ділитися на 9.

ЗАВДАННЯ 4

4.1. 54. *Порада.* Запишіть шукане число як \overline{xy} , отримайте рівняння $4x = 5y$ і врахуйте, що x і y є цифрами. **4.2.** Ні. *Порада.* Позначте кількість монет номіналом 5, 20 і 50 коп. як x , y і z відповідно, складіть рівняння $x + y + z = 20$ і $5x + 20y + 50z = 500$. Якщо від другого рівняння відніти перше, то в отриманому співвідношенні: ліва частина – кратна числу 3, а права – ні. **4.3.** З апельсинини та 8 яблук, або 7 апельсинів та 1 яблуко. *Порада.* Позначте шукану кількість апельсинів як x , а яблук – як y ; розв'яжіть діофантове рівняння $7x + 4y = 53$. Не забудьте, що значення x і y не можуть бути від'ємними. **4.4.** Ні. *Порада.* Нехай x , y , z – шукана кількість монет у 5 коп., 50 коп. та у 2 тугрики відповідно. Тоді $x + y + z = 20$, $5x + 20y + 50z = 500$. Звідси маємо діофантове рівняння $3y + 9z = 80$, яке не має розв'язків, бо числа 3 і 9 мають спільний дільник. **4.5.** (т; 3т) *Порада.* Див. приклад 2. **4.6.** а) 2; б) 9. Див. приклад 2. **4.7.** а) $x = -2 + 8t$, $y = 1 - 3t$, де $t \in \mathbb{Z}$. *Порада.* Див. приклади 3–5; б) $x = 3 - 5t$, $y = 5 + 8t$, де $t \in \mathbb{Z}$; в) $x = 5 + 7t$, $y = 6 + 9t$, де $t \in \mathbb{Z}$. *Порада.* Поділіть рівняння на 6; г) \emptyset . *Порада.* Поділіть рівняння на 12 і візьміть до уваги, що коефіцієнти у лівій частині рівняння не взаємно прості числа. **4.8.** $12t - 3$, де $t \in \mathbb{Z}$. *Порада.* Див. приклад 8. **4.9.** 3 табурети і 4 стільці. *Порада.* Позначте кількість табуретів як x , а стільців – як y . Тоді $5x + 6y = 39$. Окремим розв'язком цього лінійного діофантового рівняння є $x_0 = 3$, $y_0 = 4$; загальним: $x = 3 - 6t$, $y = 4 + 5t$, де $t \in \mathbb{Z}$. Зауважимо, що x і y – натуральні числа. При $t = 0$ маємо (3; 4); при $t \neq 0$ – немає розв'язку (або x , або y – від'ємне число). **4.11.** а) (3; -1); (1; -5). *Порада.* Див. приклад 11; б) (1; 6); (7; -12); (-1; -4); (-7; 14). *Порада.* Запишіть рівняння у вигляді $x(2x + y - 1) = 7$; в) (0; 0); (2; 2); г) (-3; 0); (1; -2); (1; 4); (-3; -6). *Порада.* Запишіть рівняння у вигляді $(y^2 - 1) - 2x(y + 1) = 5$ і розкладіть його ліву частину на множники. **4.12.** а) (0; 3), (-2; -7), (4; -1), (-6; -3). *Порада.* Запишіть рівняння у вигляді $(x + 1)(y + 2) = 5$ і





див. приклад 9; б) $(9; -2)$, $(-5; -4)$, $(3; 4)$, $(1; -10)$. **Порада.** Запишіть рівняння у вигляді $(x - 2)(y + 3) = 7$ і див. приклад 9.

4.13. а) 5; б) 9. **Порада.** Див. приклад 6. **4.14.** 34 отвори. **Порада.** Врахуйте таке. Перший майстер повинен зробити $300 : 20 = 15$ отворів, а другий – $300 : 12 = 25$. Отвори, що кратні і 20 см, і 12 см, дублюються. Це відстані, що задовільняють рівняння $20x = 12y$, розв'язки якого: $x = 3t$, $y = 5t$, і відстань дорівнює $60t$.

Тоді число спільних отворів дорівнює $\frac{300}{60} - 1 = 4$. Звідси загальне число отворів буде $15 + 25 - 4 = 36$.

4.15. а) Hi; б) на 5; в) на 2;

г) 262 161; д) 196 621; е) 589 863 грн. **4.16.** 12 по 130 кг і 9 по 160 кг. **Порада.** Треба знайти розв'язки в натуральних числах рівняння $130x + 160y = 3000$, або $13x + 16y = 300$. Врахуйте, що x кратне числу 4 і $x < 300 : 13$, тобто $x < 23$. Тоді простою перевіркою неважко отримати, що $x = 12$ відповідає цілому значенню y ($y = 9$).

4.17. а) $a = -9$; б) $a = 15$; 6) $a = 7$; $b = 14$. **4.18. а) 2; -3.** **Порада.** Перевіркою переконайтесь, що $x = 2$ є коренем рівняння. Поділіть багаточлен лівої частини рівняння на $x - 2$; б) -1 ; 3. **Порада.** Перевіркою переконайтесь, що $x = -1$ є коренем рівняння. Поділіть багаточлен лівої частини рівняння на $x + 1$, отримайте у частці $x^3 - 5x^2 + 5x + 3$. Перевіркою переконайтесь, що $x = 3$ є коренем останнього багаточлена; поділіть його на $x - 3$.

4.19. а) $(-4; 0)$. **Порада.** Див. приклад 20; б) $(4; 8)$, $(-2; -4)$. **Порада.** Поділіть тричлен $2x^3 - 2x^2 - 10x$ на $x^2 - 2x - 3$ і отримайте в частці $2x + 2$, а в остатці 6.

Далі див. приклад 20. **4.20. а) Порада.** Врахуйте, що x не кратне числу 3 і його можна записати у вигляді $x = 3n \pm 1$. Тоді $3(n^2 \pm 2n - y) = 16$; б) **Порада.** Врахуйте, що x – непарне число.

4.21. а) Немає. **Порада.** Врахуйте, що x – непарне число; б) **немає.** **Порада.** Запишіть рівняння у вигляді $(y - x)(y^2 + xy + x^2) = 18$ і доведіть, що x і y – непарні і $y - x = 2$, $y^2 + xy + x^2 = 9$. Якщо підставити $y = x + 2$ в останнє рівняння, отримаємо протиріччя.

4.22. $m = 0, n = 3$; $m = 2, n = 4$. **Порада.** Див. приклад 22. **4.23. а) $x \in \emptyset$.** **Порада.** Рівняння $5n - 5k = 1$ не має розв'язків на множині цілих чисел;

б) $x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$, де $n \in Z$; в) $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, де $n \in Z$; г) $x = \pi + 2\pi n$, де $n \in Z$;

д) $x = \pi k$, де $k \neq \frac{m}{5}$, $\{k, m\} \subset Z$. **4.24. а) $x = y = 1$.** **Порада.** Нехай $x < y$. Тоді маємо $x!(1 + (x + 1)\dots y) = x!(x + 1)\dots(x + y)$. Права частина цього рівняння ділиться на $x + 1$, а ліва – ні. Розв'язків немає. Аналогічно доводимо, що рівняння не має розв'язків у випадку $y < x$. У випадку $y = x$ маємо $(2x)! = 2 \cdot x!$, $2x \cdot (2x - 1)\dots(x + 1) = 2$, $x = 1$; б) $(1; 2)$, $(1; -2)$. **Порада.** Перепишемо дане рівняння у вигляді $x(15x^2 + 2 - 4xy(y^2 - x + 1)) = 1$. Звідси для x маємо лише два можливі значення: $x = \pm 1$. При $x = 1$ задане рівняння перетворюється



на $y^2 = 4$, $y = \pm 2$. При $x = -1$ задане рівняння перетворюється на $2y(y + 2) = -9$, що не має розв'язку в цілих числах (ліва частина – парна, права – непарна); **в)** $(5; 6)$, $(-6; -5)$, $(-3; 4)$, $(-4; 3)$. *Порада.* Перепишемо дане рівняння у вигляді $(y - x)(y^2 + xy + x^2) = 13 \cdot 7$.

Оскільки $y^2 + xy + x^2 = \left(y + \frac{x}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}x^2 \geq 0$, то можливі лише чотири

випадки: 1) $y - x = 1$. Отримаємо $(5; 6)$, $(-6; -5)$. 2) $y - x = 7$. Отримаємо $(-3; 4)$, $(-4; 3)$. 3) $y - x = 13$. Розв'язків немає. 4) $y - x = 91$. Розв'язків немає. **4.25.** $(3; 2)$. *Порада.* Число $2y^2$ – парне, тоді x – непарне. Тому число $2y^2 = (x - 1)(x + 1)$ ділиться на 4. Звідси y – парне. За умовою y – просте число, отже, $y = 2$. **4.26. а)** $(24; 8)$; $(54; 2)$.

Порада. Перепишемо дане рівняння у вигляді $x = \frac{243y}{(y + 1)^2}$. Знамен-

ник повинен містити множники числа 243 (бо y і $y + 1$ не мають спільних множників, див. § 1). Оскільки $243 = 3^5$, то $(y + 1)^2$ може дорівнювати $1^2, 3^2, 9^2$. Враховуючи, що число y є натуральним, маємо два розв'язки: $y = 2$, $y = 8$; **б)** $(1; 2; 3)$, $(1; 3; 2)$, $(2; 1; 3)$, $(2; 3; 1)$, $(3; 2; 1)$, $(3; 1; 2)$. *Порада.* Зазначимо, що невідомі x , y і z входять до рівняння симетрично. Нехай $x \leq y \leq z$ (розв'язки для інших випадків співвідношення змінних отримаємо перестановкою значень x , y , z). Заміною у лівій частині рівності x і y на більше число z маємо $3z \geq xyz$. До того рівність досягається лише у випадку $x = y = z$, що неможливо (в натуральну числах $3z = z^3$ не має розв'язку). Тоді $3z > xyz$, $3 > xy$ (бо $z \in N$). Тоді, враховуючи, що $\{x, y\} \in N$ і $x \leq y$, маємо: або $x = y = 1$, або $x = 1$, $y = 2$. У першому випадку $2 + z = z$, розв'язків немає; у другому отримаємо $z = 3$. Тобто при $x \leq y \leq z$ маємо розв'язок $(1; 2; 3)$. **4.27.** $(8; 9; 9)$,

$(12; 11; 11)$. *Порада.* З другого рівняння $y = \frac{10x + 1}{z}$. Тоді з першого рівняння маємо $x = z - \frac{1}{10 - z}$. Звідси $10 - z = \pm 1$, $z \in \{9; 11\}$. Якщо $z = 9$,

то $x = 8$, $y = 9$. Якщо $z = 11$, то $x = 12$, $y = 11$. **4.28.** $(5; 2; 7)$, $(5; 7; 2)$, $(7; 3; 4)$, $(7; 4; 3)$. *Порада.* Зазначимо, що невідомі y і z входять до рівняння симетрично. Віднімемо від другого рівняння перше. Отримаємо $yz - y - z = 5$, $yz - y - z + 1 = 5 + 1$, $(y - 1) \times (z - 1) = 6$. Знайдемо $y \leq z$ (інші розв'язки отримаємо перестановкою значень y і z). Тоді маємо два випадки:

$$\begin{cases} y - 1 = 1 \\ z - 1 = 6, \end{cases} \quad \begin{cases} y - 1 = 2 \\ z - 1 = 3. \end{cases}$$

4.29. Порада. Перепишіть рівняння у вигляді $x \cdot \frac{y}{x + y} = n$. Пере-
вірте, що $x = n$ не є розв'язком. Тоді $y = \frac{nx}{x - n}$, $x < n$. Тоді $x = n + k$, де k – ціле, додатне; $y = n + \frac{n^2}{k}$. Зрозуміло, що k – дільник n^2



(бо y – ціле). **4.30.** $(3; 3; 3), (2; 4; 4), (2; 3; 6)$ та відповідні перестановки значень x, y, z . *Порада.* Зазначимо, що невідомі x, y і z входять до рівняння симетрично. Нехай $x \leq y \leq z$ (розв'язки для інших випадків співвідношення змінних отримаємо перестановкою

значень x, y, z). Тоді $1 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{3}{x}$, отже, $x \leq 3$, $x \in \{1, 2, 3\}$.

1) $x = 1$ – розв'язків немає. 2) $x = 2$, $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$, $y \geq 2$. Зрозуміло,

що $y \neq 2$. Якщо $y = 3$, то $z = 6$. Якщо $y = 4$, то $z = 4$. Якщо $y > 4$, то і $z > 4$, $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} < \frac{1}{2}$ – розв'язків немає. 3) $x = 3$, $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{2}{3}$, $y \geq 3$.

Якщо $y = 3$, то $z = 3$. Якщо $y > 3$, то і $z > 3$, $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} < \frac{2}{3}$ – розв'язків

немає. Отже, дане рівняння без урахування перестановок має три розв'язки: $(2; 3; 6), (2; 4; 4), (3; 3; 3)$.

ЗАВДАННЯ 5

5.1. а) 20. *Порада.* Є п'ять парних цифр: 0, 2, 4, 6, 8. Першою може бути будь-яка з них, окрім 0 – 4 можливості. Другою будь-яка з п'яти. Маємо $4 \cdot 5 = 20$ чисел; **б)** 18. *Порада.* Див. приклад 2.

5.2. а) 125. *Порада.* Візьміть до уваги, що всього непарних цифр п'ять і кожна з них може стояти в будь-якому розряді трицифрового числа. Маємо $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$; **б)** 300. *Порада.* Аналогічно до прикладу 1 запишіть шукані числа як $a = 3n + 2$; розгляньте арифметичну прогресію $a_m - 2 = 3m$ з першим членом 99, різницею 3 і останнім членом 996. Тоді для шуканого числа n маємо $996 = 99 + (n - 1)3$; **в)** 60. *Порада.* Розглянемо двоцифрове число a , утворене першими двома цифрами трицифрового заданого числа b , тобто $b = ac$, де c – цифра. Якщо $a : 3$, то $c \in \{0, 3\}$; якщо a при діленні на 3 дає остаточу 1, то $c \in \{1, 5\}$; якщо a при діленні на 3 дає остаточу 2, то $c \in \{2, 4\}$. Тоді чисел b у два рази більше, ніж чисел a , тобто двоцифрових чисел, утворених із цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5. Кількість чисел a дорівнює (аналогічно до 5.1 а)) $5 \cdot 6 = 30$. Отже, шуканих чисел усього $30 \cdot 2 = 60$. **5.3. а)** 11!; **б)** $(n + 1)!$; **в)** 9900; **г)** n . **5.4. Порада.** Скористайтеся методом від супротивного. **5.5. 3. Порада.** 5!, 6!, ..., 9! – числа, що закінчуються нулем; $1! + 2! + 3! + 4! = 1 + 2 + 6 + 24 = 33$. **5.6. Порада.** У добутку $1 \cdot 2 \cdots 25$ є прості співмножники (наприклад 23) з непарним показником степеня. **5.7. 4!. 5.8. 4!. 5.9. 4!,** якщо серед даних цифр немає нуля; $3 \cdot 3!$, якщо серед заданих цифр міститься нуль. **5.10. 31 250. Порада.** $5^6 \cdot 2$. Див. приклади 3 і 8. **5.11. 9 \cdot 9!** *Порада.* Візьміть до уваги, що на першому місці не може стояти нуль. **5.12. 720. Порада.** Візьміть до уваги, що



одну вершину трикутника можна обрати 10 способами, другу – дев'ятьма, третю – вісімома. **5.13.** 325. *Порада.* Додамо кількість варіантів, за якими можна скласти стопку з однієї, двох, трьох, чотирьох і п'яти книг: $5 + 5 \cdot 4 + 5 \cdot 4 \cdot 3 + 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 + 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 325$. **5.14.** а) 2 025 856. *Порада.* $64 \cdot 49 \cdot (49 - 15) \cdot (34 - 15) = 2025856$ (див. приклад 5); б) Не має розв'язку. *Порада.* Див. приклад 5 і пораду до 5.8 а); в) 32^2 . *Порада.* Для кожного (не залежно від позиції слона на іншого кольору) маємо 32 варіанти розміщення; г) 3696. *Порада.* Розгляньте 3 варіанти розміщення першого коня у клітинках уздовж краю дошки; 2 варіанти його розміщення у другому рядку клітинок від краю дошки; розміщення в інших 16 клітинках дошки. Маємо: $(4(64 - 3) + 8(64 - 4) + 16(64 - 5)) + (4(64 - 5) + 16(64 - 7)) + 16(64 - 9) = 3696$. **5.15.** 895 680. *Порада.* $900\ 000 - 6 \cdot 6! = 900\ 000 - 4320 = 895\ 680$ (див. приклад 8 і задачу 5.10). **5.16.** Інших більше. *Порада.* Кількість п'ятицифрових чисел, у запису яких немає 1, дорівнює $8 \cdot 9^4$, отже, кількість чисел, що мають цифру 1, дорівнює $9 \cdot 10^4 - 8 \cdot 9^4$. Залишилося порівняти числа $8 \cdot 9^4$ і $(9 \cdot 10^4 - 8 \cdot 9^4)$, маємо $16 \cdot 9^3 < 10^4$. **5.17.** а) 15; б) 64. *Порада.* Див. приклад 11 та властивість сполучень, наведену після нього. **5.18.** $\frac{n(n-3)}{2}$. *Порада.* Кожну пару вершин багатокутника сполучає або сторона цього багатокутника, або його діагональ. Отже, кількість діагоналей дорівнює $C_n^2 - n$. **5.19.** 28 560. *Порада.* Останньою цифрою шуканих чисел може бути або 0, або 5. У першому випадку інші п'ять цифр обираємо з {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9}; тобто маємо A_9^5 варіантів. У другому випадку врахуємо, що на перше місце не можна поставити нуль. Тому маємо 8 варіантів для цифри старшого розряду, A_8^4 для інших розрядів, тобто всього $8A_8^4$ варіантів. Загалом умові задачі відповідає $A_9^5 + 8A_8^4$ чисел. **5.20.** 8375. *Порада.* Див. приклад 14. **5.21.** 72. *Порада.* Див. приклади 8 і 14. **5.22.** Більше тих, у запису яких використовується цифра 7. *Порада.* Усього семицифрових чисел $9 \cdot 10^6$; з них не містять цифру 7 всього $8 \cdot 9^6$ чисел; порівнюємо $(9 \cdot 10^6 - 8 \cdot 9^6)$ з $8 \cdot 9^6$. Різниця останніх чисел дорівнює $9 \cdot (10^6 - 16 \cdot 9^5) = 9 \cdot 16(100 \cdot 5^4 - 9^5) = 9 \cdot 16 \cdot (62\ 500 - 59\ 049) > 0$. **5.23.** а) $(n-2)(n-1)!$; в) $(n^2 - n - 6)(n-2)!$. **5.24.** 332 640. **5.25.** 64 800. *Порада.* Див. приклад 14. **5.26.** а) 10. *Порада.* Одне число із цифрою 2 у старшому розряді (інші цифри – нулі) і 9 чисел із цифрою 1 у старшому розряді (інші цифри – вісім нулів та одна одиниця). **5.27.** а) C_{10}^7 . *Порада.* Див. приклад 16; б) C_9^7 . *Порада.* Див. приклад 15. **5.28.** 54. *Порада.* До шуканих чисел належать числа, цифри яких ідуть у порядку спадання, їх 45 (див. приклад 17), і числа, цифри яких однакові, іх 9 (11, 22, ..., 99). Разом: $45 + 9 = 54$. **5.29.** 180. *Порада.* До шуканих чисел належать: числа, цифри яких ідуть у





порядку спадання, їх $C_{10}^3 = 120$ (див. приклад 18); числа, в яких усі цифри однакові, їх 9 (111, 222, ..., 999); числа, які утворено з двоцифрових чисел, записаних цифрами в порядку спадання, до яких приписали праву цифру праворуч, приписали ліву цифру ліворуч, їх $2 \cdot C_{10}^2 = 2 \cdot 45 = 50$; число 100. Разом: $120 + 9 + 50 + 1 = 180$. **5.30.** 120. *Порада.* Таке число отримаємо з кожного трицифрового числа, цифри якого йдуть у порядку спадання, якщо в нього перевести місцями другу й третю цифри: $C_{10}^3 = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = 120$. **5.31–5.34.**

Порада. Див. приклади 15–18. **5.35.** C_{10}^3 . *Порада.* Уявіть число 11 у вигляді 11 точок, розміщених у рядок. Тоді будь-яке представлення числа 11 у вигляді 4 доданків можна відмітити трьома рисочками. Наприклад, вираз $11 = 5 + 3 + 2 + 1$ можна зобразити так: . . . | . . . | . . . Легко бачити, що і навпаки, певному розміщенню трьох вертикальних рисочек відповідає конкретне представлення числа 11 у вигляді чотирьох доданків. Тоді задача зводиться до питання: скількома способами можна розмістити три рисочки у представленні числа 11 у вигляді точок? Візьміть до уваги, що ліва рисочка не може опинитися поза точками, бо за умовою всі доданки відмінні від нуля.

ЗАВДАННЯ 6

6.1. а) 4; б) 0; в) 1; г) 2; д) 3. **6.2.** *Порада.* Див. приклад 2. **6.3.** 2010. *Порада.* $2012 = 182 \cdot 11 + 10$. Шукане число $2012 - 2 = 2010$. **6.4.** 9976. *Порада.* Див. приклад 1. **6.5.** На шостому поверсі під'їзду № 3. *Порада.* На одному поверсі даного будинку $103 - 97 = 6$ квартир. Тоді в одному під'їзді $8 \cdot 6 = 48$ квартир. $178 : 48 = 3$ (ост. 34), отже, дана квартира в під'їзді № 3; $34 : 6 = 5$ (ост. 4), отже, дана квартира на шостому поверсі. **6.6.** Ні. *Порада.* Після розрізання першого аркуша утвориться $(7 - 1) + 7$ частин. Кількість частин після кожного розрізання буде збільшуватися на 6. Після n -го розрізання матимемо $6n + 7 = 6(n + 1) + 1$ частин. Тобто кількість утворених частин при діленні на 6 дає остатчу 1. А 2012 при діленні на 6 дає остатчу 3. **6.7. а) 2; б) 5,** якщо $n > 4$; 0, якщо $n = 4$; 1, якщо $n = 3$; 2, якщо $n = 2$; 3, якщо $n = 1$. *Порада.* Див. приклад 6 і візьміть до уваги, що $4n + 7 = 2(n + 1) + 5$; **в) 9,** якщо $n > 5$; 0, якщо $n = 5$; 1, якщо $n = 4$; 2, якщо $n = 3$; 3, якщо $n = 2$; 4, якщо $n = 1$. *Порада.* Див. приклад 6 і візьміть до уваги, що $2n^2 + 5n - 3 = (n + 4)(2n - 3) + 9$; **г) 1,** якщо n – парне, 2, якщо n – непарне. *Порада.* Якщо $n = 2k$, то $n^2 + 1 = 4k^2 + 1$; якщо $n = 2k + 1$, то $n^2 + 1 = 4(k^2 + k) + 2$. **6.8.** 301. *Порада.* Щоб число ділилося на 4, 5 і 6, необхідно і достатньо, щоб воно ділилося на 60. Нехай книжок загалом n . Тоді $n - 1 = 60k$. Знайдемо найменше (натуральне) k , при якому n ділиться на 7: $n = 60k + 1 = 56k + (4k + 1)$, $k = 5$.

Отже, $n = 60 \cdot 5 + 1 = 301$.

6.9. а) *Ні. Порада.* Остача завжди менша від дільника; б) ні. *Порада.* Не завжди. Контрприклад: число 15; в) так. *Порада.* Див. приклад 4; г) Так. *Порада.* Див. приклад 4 і загальний розв'язок діофантового рівняння (4) на с. 45.

6.10. Ні. *Порада.* Врахуйте, що число $b^2 - 4ac$ при діленні на 4 має остачу 0 або 1 (лема 1), а число 23 – остачу 3.

6.11. *Порада.* Запишіть квадрат непарного числа у вигляді $(4k^2 \pm 1)$ і доведіть, що різниця $(4k^2 \pm 1) - 3^2$ кратна числу 8.

6.12. *Порада.* Доведіть, що $(n^3 - n) : 6$.

6.13. *Порада.* Скористайтеся задачею 6.12.

6.14. $n = 1$. *Порада.* Позділіть $n^2 + 9n + 14$ на $n + 5$ (див. с. 54) і запишіть $n^2 + 9n + 14 = = (n + 4)(n + 5) - 6$; $n + 5 = 6$ за умови $n = 1$.

6.15. *Порада.* Врахуйте, що n не може бути парним і не може бути кратним числу 3. Тоді числа $n \pm 1$ – парні й одне з них ділиться на 4 (див. властивість (10) с. 7). Число n не ділиться на 3, тоді одне із чисел $n \pm 1$ кратне числу 3. Тобто $n^2 - 1 = 24m$, $n^2 = 24m + 1$.

6.16. *Порада.* Візьміть до уваги лему 3.

6.17. $p = 3$. *Порада.* Перевірте, що $p = 2$ не задовольняє умову, а $p = 3$ – задовольняє. Доведіть від супротивного, що числа $p > 3$ не задовольняють умову (розгляньте можливі остачі від ділення на 3).

6.18. $p = 2$. *Порада.* Див. задачу 6.17 і приклади 10, 13.

6.19. $p = 3$. *Порада.* Див. приклад 10.

6.20. $n = 2$. *Порада.* Див. приклад 10 і візьміть до уваги, що n може бути тільки парним.

6.21. *Порада.* Розгляньте остачу від ділення правої і лівої частин співвідношення на 3. (Див. приклад 12.)

6.22. *Порада.* Розгляньте остачі при діленні на 9.

6.23. *Порада.* Розгляньте всі можливі остачі, що дає n при діленні на 5, і проаналізуйте відповідні остачі при діленні на 5, заданого виразу.

6.24. Ні. *Порада.* Врахуйте лему 1 і те, що при діленні на 3 число та сума його цифр дають однакові остачі.

6.25. Ні. *Порада.* Див. приклад 11.

6.26. $1073 = 32^2 + 7^2$. *Порада.* Остачі від ділення даних чисел на 4 дорівнюють відповідно 1, 3, 3. Отже, за лемою 1 останні два числа не можна представити як суму двох квадратів. Знайдемо такі цілі a і b , щоб $1073 = a^2 + b^2$. Один із цих квадратів кратний чотирьом (відповідна остача нуль), а другий – квадрат непарного числа (відповідна остача 1). Перебором знайдемо, що $1073 - (16 \cdot 2)^2 = 49$.

6.27. *Порада.* Запишіть $p^3 + 2 = p(p^2 + 2) - - p(p - 1)$.

6.28. *Порада.* Див. лему 1 та зауваження до неї.

6.29. Другий. Він додає число, остача якого при діленні на 5 доповняє відповідну остачу супротивника до 5, якщо той додав не 5; якщо супротивник додав 5, то він також додає 5.

6.30. Якщо n кратне числу 5 – другий (див. 6.29). Якщо n некратне числу 5 – перший. Першим кроком він записує остачу від ділення n на 5, а потім дотримується стратегії 6.29.

6.31. 2. *Порада.* Скористайтеся алгоритмом Евкліда.

6.32. *Порада.* Скористайтеся алгоритмом Евкліда (див. приклад 19).

6.33. *Порада.* Скористайтеся тим, що $\text{НСД}(a; b) = \text{НСД}(a - b)$. Нехай $m > n$. $\text{НСД}(2^n - 1; 2^m - 1) = \text{НСД}(2^n - 1; 2^m - 2^n) = \text{НСД}(2^n - 1; 2^n(2^{m-n} - 1))$. Врахуйте, що

НСД $(2^n - 1; 2^n) = 1$ (див. (11), с. 8), тоді НСД $(2^n - 1; 2^n(2^{m-n} - 1)) = \text{НСД } (2^n - 1; (2^{m-n} - 1))$. Застосуємо цю процедуру ще раз. На останньому кроці отримаємо НСД $(2^c - 1; 2^c - 1)$, де $c = \text{НСД } (m; n)$ (див. доведення алгоритму Евкліда, с. 82). **6.34. Порада.** Див. 6.33.

ЗАВДАННЯ 7

- 7.1. а) 1. Порада.** Візьміть до уваги властивість 7 і те, що $9 \equiv 8$;
- б) 1. Порада.** Візьміть до уваги властивість 7 і те, що $2 \equiv -1$;
- в) -1. Порада.** Аналогічно до б).
- 7.2 а) $n = 14k + 2$.** Порада. $15 \equiv 1$, $n \equiv 2$; **б) $n = 16k - 2$.** Порада. $15 \equiv -1$, $-n \equiv 2$, $n \equiv -2$; **в) $n = 3k + 1$.** Порада. $8 \equiv -1$, $-n \equiv 2$, $n \equiv -2 \equiv 1$.
- 7.3. а) 1.** Візьміть до уваги властивості 3, 5, 7; **б) 5.** Порада. $116 \equiv 4$, $17 \equiv 1$, $(116 + 17)^{21} \equiv 5^{21} = (5^2)^{10} \cdot 5 \equiv 1^{10} \cdot 5 = 5$.
- 7.4. а) Порада.** Див. приклад 4; **б) Порада.** Див. приклад 4; **в) Порада.** Запишіть $43 \cdot 101 + 23 \cdot 101 = (43 \cdot 1000 + 101) + (23 \cdot 1000 + 101)$ і візьміть до уваги властивості 3 і 6; **г) Порада.** Візьміть до уваги, що числа $2^6, 3^6, 5^6$ порівнювані за модулем 7 із числом 1.
- 7.5. а) Порада.** Врахуйте, що при діленні на 5 довільне n може давати остачі $\{0, 1, 2, 3, 4\}$, тобто n порівнюване за модулем 5 із числом 1, або 2, або 3, або -2, або -1. Розгляньте всі можливі випадки. Наприклад, якщо $n \equiv 2$, то $n^5 + 4n \equiv 2^5 + 4 \cdot 2 = 2^2(2^2 + 1) \equiv 5$; **б) Порада.** Представте $n^3 + 11n = n(n^2 + 11)$ і доведіть, що останній вираз завжди парний і кратний числу 3 (розгляньте три можливі випадки: $n \equiv 3$, $n \equiv 1$, $n \equiv -1$); **в) Порада.** Представте $n^5 - n = n(n^4 - 1)$ і доведіть, що останній вираз завжди парний і кратний числу 5 (аналогічно до 7.5 а)); **г) Порада.** $a^2 = a^2 - a + 1 + (a - 1)$. Тоді числа a^2 і $a - 1$ порівнювані при діленні на $a^2 - a + 1$, $a^{2n+1} - (a - 1)^{n+2} \equiv a^{2n+1} + (a^2)^{n+2} = a^{2n+1}(1 + a^3) = a^{2n+1}(1 + a)(a^2 - a + 1) \equiv a^2 - a + 1$.
- 7.6. а) $n = 6 + 7k$, $k \in \mathbb{Z}$.** Порада. $8 \equiv 1$, $1 \equiv -6$, тоді $n - 6 \equiv 0$, $n \equiv 6$; **б) $n = 2 + 11k$, $k \in \mathbb{Z}$.** Порада. $81 \equiv 4$, $13 \equiv 2$, тоді $4 - 2n \equiv 0$, $2 \cdot n \equiv 2 \cdot 2$, $n \equiv 2$; **в) $n = -4 + 13k$, $k \in \mathbb{Z}$.** Порада. $29 \equiv 3$, $40 \equiv 1$, тоді $3n - 1 \equiv 0$, $3n \equiv 1 \equiv -12$, $3 \cdot n \equiv 3 \cdot (-4)$, $n \equiv -4$; **г) $n \in \{-21, -9, -5, -3, -1, 0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 15, 27\}$.** Порада. Позначте $t \triangleq n - 3$, $(t + 3)^3 - 3 \stackrel{|t|}{\equiv} 0$, $3^3 - 3 \stackrel{|t|}{\equiv} 0$, $24 \stackrel{|t|}{\equiv} 0$, тобто $|t| -$ дільник числа 24, $|t| \in \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$, $n \in \{-21, -9, -5, -3, -1, 0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 15, 27\}$.
- 7.7. Порада.** Запишіть заданий вираз у вигляді $2 \cdot (2^3)^{2k} + 3 \cdot (3^3)^{2k} + (5^2)^{3k} + 1$ і врахуйте, що $8 \equiv 1$, $27 \equiv -1$, $25 \equiv 1$, і скористайтеся властивостями порівнянь.
- 7.8. Порада.**



рада. Візьміть до уваги, що число наступне після $(p - 1)!$ ділиться на p .

7.9. Порада. $10 \stackrel{7}{\equiv} 3$, $10^{3n+1} \stackrel{7}{\equiv} 3^{3n+1} = 3 \cdot 27^n \stackrel{7}{\equiv} 3 \cdot (-1)^n$ і за лемою 5 задане число не може бути представлене як сума двох кубів.

7.10. Ні. Порада. Див. приклад 10.

7.11. а) $n \stackrel{8}{\equiv} 6$. **Порада.** $3n \stackrel{8}{\equiv} -6$, $3 \cdot n \stackrel{8}{\equiv} 3 \cdot (-2)$, $n \stackrel{8}{\equiv} -2$ (3 і 8 взаємно прості, див. властивість 8), $n \stackrel{8}{\equiv} 6$, $n = 8k + 6$;

б) $x \stackrel{37}{\equiv} 12$. **Порада.** Помножимо обидві частини даного порівняння на 2, тоді $34x \stackrel{37}{\equiv} 38$, $-3x \stackrel{37}{\equiv} 1$, $3x \stackrel{37}{\equiv} -1$, $3x \stackrel{37}{\equiv} 36$, $3 \cdot x \stackrel{37}{\equiv} 3 \cdot 12$, $x \stackrel{37}{\equiv} 12$;

в) $y \stackrel{29}{\equiv} 17$. **Порада.** $29 \cdot 5 = 145$, $29 \cdot 2 = 58$. Тоді маємо $2y \stackrel{29}{\equiv} 5$, $2y \stackrel{29}{\equiv} -24$, $2 \cdot y \stackrel{29}{\equiv} 2 \cdot (-12)$. $y \stackrel{29}{\equiv} -12 \stackrel{29}{\equiv} 17$;

г) $x \stackrel{47}{\equiv} 45$. **Порада.** Отримайте з даного порівняння: $11x \stackrel{47}{\equiv} 40$, $22x \stackrel{47}{\equiv} 80$, $22x \stackrel{47}{\equiv} 33$, $2x \stackrel{47}{\equiv} 3$, $2x \stackrel{47}{\equiv} -44$, $x \stackrel{47}{\equiv} -22$, $x \stackrel{47}{\equiv} 45$.

7.12. а) $x = -1 - 49k$, $y = 1 + 7k$, де $k \in Z$. **Порада.** Див. приклад 15;

б) $x = 7 + 15k$, $y = 5 + 13k$, де $k \in Z$. **Порада.** Див. приклад 15;

в) **Порада.** Візьміть до уваги, що $252 : 18$, $162 : 18$. Тоді маємо: $5x \stackrel{18}{\equiv} 13$, $5x \stackrel{18}{\equiv} -5$, $5 \cdot x \stackrel{18}{\equiv} 5 \cdot (-1)$, $x \stackrel{18}{\equiv} -1$, $x = -1 + 18k$, $y = 24 - 257k$, де $k \in Z$.

7.13. а) **Ні. Порада.** $x^2 \stackrel{7}{\equiv} 10 \stackrel{7}{\equiv} 3$, чого не може бути за лемою 2;

б) **ні. Порада.** $15 \cdot x^2 \stackrel{7}{\equiv} 9$, $x^2 \stackrel{7}{\equiv} 2$, чого не може бути за лемою 2;

в) **ні. Порада.** $x^3 \stackrel{7}{\equiv} -5 \stackrel{7}{\equiv} 2$, чого не може бути за лемою 5.

7.14. $x = -17 + 118k$, $y = 9 - 61k$, $z = -1 + 7k$, де $k \in Z$.

Порада. Помножте перше рівняння на 3, друге – на 4 і відніміть, отримаєте $7y + 61z = 2$. Здійсніть порівняння правої та лівої частин останньої рівності за модулем 7, отримаєте $z \stackrel{7}{\equiv} -1$, $z = -1 + 7k$, де $k \in Z$.

7.15. а) **1. Порада.** Застосуйте малу теорему Ферма (див. приклад 18);

б) **1. Порада.** Візьміть до уваги, що $256 = 16^2$ і застосуйте малу теорему Ферма.

7.16. Порада. За малою теоремою Ферма $2^{12} \stackrel{13}{\equiv} 1$, тоді $2^{60} \stackrel{13}{\equiv} 1$. З того, що $2^5 \stackrel{13}{\equiv} 6$, а тоді $2^{10} \stackrel{13}{\equiv} -3$, маємо $2^{70} \stackrel{13}{\equiv} -3$. З іншого боку, $3^3 \stackrel{13}{\equiv} 1$, $3^{69} \stackrel{13}{\equiv} 1$, $3^{70} \stackrel{13}{\equiv} 3$. Маємо: $2^{70} + 3^{70} \stackrel{13}{\equiv} -3 + 3 = 0$.

7.17. Порада. $(7^{12})^{10} \stackrel{11}{\equiv} 1$, $(7^{10})^{12} \stackrel{13}{\equiv} 1$. Застосуйте малу теорему Ферма.

7.18. Порада. Розгляньте добуток $(n^8 - 1)(n^8 + 1) = n^{16} - 1$ і застосуйте малу теорему Ферма.

7.19. Порада. $2^6 = 64 \stackrel{9}{\equiv} 1$, тоді $2^{6k} \stackrel{9}{\equiv} 1$, $2^{6k+2} \stackrel{9}{\equiv} 2^2$. Обидві частини останнього порівняння парні, тоді $2^{6k+2} \stackrel{18}{\equiv} 2^2$. Отже, $2^{6k+2} = 18t + 2^2$, де $t \in \{0, 1, 2, \dots\}$. За малою теоремою Ферма $2^{18} \stackrel{19}{\equiv} 1$. Тоді $2^{18t} \stackrel{19}{\equiv} 1$, $2^{26k+2} = 2^{18t+4} \stackrel{19}{\equiv} 2^4$, $2^{26k+2} + 3 \stackrel{19}{\equiv} 2^4 + 3 \stackrel{19}{\equiv} 0$.

7.20. Порада. Розгляньте випадок кратності та не кратності a і b числу p . У випадку не кратності a , b числу p візьміть до ува-





ги наслідок з малої теореми Ферма. **7.21. Порада.** Доведіть, що $n^3 \equiv n^3$ (розвіглянте випадки $n : 3$ і не кратне числу 3), і проаналізуйте парність шуканого виразу. **7.22. Порада.** Візьміть до уваги, що кожне з даних чисел або кратне числу 7, або не ділиться на 7; у випадку, коли число a не ділиться на сім, $a^7 \not\equiv a$. **7.23. Порада.** Доведіть, що $n^5 \equiv n^5$; проаналізуйте парність шуканого виразу (наприклад, через порівняння за модулем 2); візьміть до уваги, що задані три числа порівнювані за модулем 3 із числами або $\{1, 1, 1\}$, або $\{-1, -1, -1\}$, або $\{1, -1, 0\}, \{0, 0, 0\}$. **7.24. Порада.** Візьміть до уваги, що $2730 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$, $n^{13} - n = n(n^{12} - 1)$. Для кожного $p \in \{2, 3, 5, 7, 13\}$ або $n : p$, або для n^{p-1} виконується твердження малої теореми Ферма. **7.25. а)** $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}^8 \equiv \overline{a_2 a_1 a_0}$; **б)** $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}^{16} \equiv \overline{a_3 a_2 a_1 a_0}$; **в)** $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}^{20} \equiv \overline{a_1 a_0}$; **г)** $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}^{25} \equiv \overline{a_1 a_0}$. **7.26.** Число $(a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0)_8 : 7$ тоді й тільки тоді, коли $(a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0) : 7$. **Порада.** Візьміть до уваги, що кожне число у вісімковій системічислення має вигляд $a_n 8^n + a_{n-1} 8^{n-1} + \dots + a_1 8 + a_0$, а $8^k \equiv 1$. **7.27.** Число ділиться на 9 тоді й тільки тоді, коли $(a_n - a_{n-1} + \dots + (-1)^{n-1} a_1 + (-1)^n a_0) : 9$. **7.28.** Число $(a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0)_p : (p-1)$ тоді й тільки тоді, коли $(a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0) : (p-1)$. Число $(a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0)_p : (p+1)$ тоді й тільки тоді, коли $(a_n - a_{n-1} + \dots + (-1)^{n-1} a_1 + (-1)^n a_0) : (p+1)$. **7.29. Порада.** Запишіть дане число a у вигляді $a = 10b + c$. Маємо $2a - (b + 2c) = 19b : 19$, отже, $a \equiv b + 2c$. **7.31.** Якщо $k : 3$, то виграє другий, інакше – перший. 1) Якщо $k : 3$, то другий після ходу первого дописує цифру, сума якої із попередньою (що написана первшим гравцем) при діленні на 9 дає остатчу 6 (тобто: після 6 – 9, після 7 – 8, після 8 – 7, після 9 – 6). 2) Якщо $k \not\equiv 1$, то перший спочатку ставить цифру, відмінну від 9, а далі дотримується стратегії, пропонованої для другого у п. 1. За такої гри сума всіх цифр, за винятком першої, ділиться на 9, але перша цифра відмінна від 9. 3) Якщо $k \not\equiv 2$, то перший спочатку ставить цифру 9, а далі для кожного ходу, за винятком останнього, дотримується стратегії, пропонованої для другого у п. 1. Якщо передостаннім ходом другого буде цифра 9, то перший записує цифру, відмінну від 9. Якщо передостаннім ходом другого буде цифра, відмінна від 9, то перший записує цифру 9. За такої гри сума всіх цифр, окрім трьох останніх, ділиться на 9; серед останніх трьох є одна 9 і одна цифра, відмінна від 9. Отже, отримане число не ділиться на 9. **7.32. Другий.** **Порада.** Стратегія аналогічна до прикладу 24 (гра Баше). **7.33. Якщо** n ділиться на b , то гру виграє той, хто робить другий хід. Якщо n не ділиться на b , то гру виграє той, хто робить



перший хід. *Порада.* Ця задача є варіантом гри Баше (див. приклад 24 і задачу 7.32). Виграшна стратегія полягає в тому, щоб змушувати партнера робити хід тоді, коли кількість сірників у купці кратна числу b .

ЗАВДАННЯ 8

8.1–8.3. Порада. Див. приклади 1, 2. **8.4. Порада.** Див. приклад 1. **8.8. Порада.** Треба довести методом математичної індукції, що сума чисел $(n - 1)^3 + n^3 + (n + 1)^3$ ділиться на 9. **8.9. Порада.** Див. приклади 3, 4. **8.11. Порада.** Перевірте правильність твердження при $n = 5$. Доведіть, спираючись на $2^k > 5k + 1$, індукційний перехід. Маємо: $2^{k+1} = 2^k \cdot 2 > (5k + 1) \cdot 2$; $k \geq 5$, тоді $10k + 2 > 5k + 5 + 1 = 5(k + 1) + 1$. **8.12. Порада.** Див. задачу 8.10. **8.13. а)** $n \geq 3$. *Порада.* Перевірте твердження при $n \in \{1, 2, 3\}$. Доведіть правильність нерівності для $n \geq 3$ методом математичної індукції; **б)** $n \geq 5$. *Порада.* Доведіть нерівність для $n \geq 5$ методом математичної індукції. При доведенні індукційного переходу скористайтесь тим, що $2k^2 > (k + 1)^2$, бо квадратний тричлен $k^2 - 2k - 1$ при $k > 5$ набуває додатних значень. Зauważимо, що при $n = 1$ нерівність теж має місце, але довести індукційний перехід при $k \leq 2$ неможливо. **8.14. Порада.** Див. приклад 5. **8.15. Порада.** Скористайтесь твердженням задачі 8.12. **8.16. Порада.** При $n = 2$ маємо $(1 + a)^2 = 1 + 2a + a^2 > 1 + 2a$ (бо $a \neq 0$). Нехай $(1 + a)^k > 1 + ka$. Помножимо цю нерівність на $(1 + a)$, маємо: $(1 + a)^{k+1} > (1 + (k + 1)a) + ka^2 > 1 + (k + 1)a$. Базу індукції та індукційний перехід доведено, отже, шукана нерівність виконується для довільних $n \geq 2$. **8.17. Порада.** При проведенні $(n + 1)$ -ї прямої число утворених частин площини збільшується на $n + 1$; загальна кількість частин площини за наявності n прямих дорівнює $2 + 2 + 3 + \dots + n$. Доведіть методом математичної індукції, що остання сума дорівнює $\frac{n(n + 1)}{2} + 1$ (див. приклад 2).

ЗАВДАННЯ 9

9.1. Порада. Цукерок (кролів) більше, ніж школярів (кліток). **9.2. Порада.** У тижні 7 днів < 8 . **9.3. Порада.** Рік має не більше як 366 днів; $366 \cdot 2 = 732 < 740$; див. приклад 2. **9.4. Порада.** Врахуйте, що $200 = 21 \cdot 4 + 16$; див. приклад 2. **9.5. Порада.** Рік має 12 місяців; $12 \cdot 4 = 48 < 50$; див. приклад 2. **9.6. Порада.** З двох літер можна скласти $2 \cdot 2 = 4$ різні пари (з повторенням літери). В українській абетці 31 літера. З них можна утворити $31 \cdot 31 = 961$ різних ініціалів, $961 < 980$. **9.7. Ні. Порада.** $50 = 7 \cdot 7 + 1$. Отже, хоча б на одній вантажівці треба розмістити 8 каменів. Вага восьми найлегших каменів дорівнює 370 кг + 372 кг + ... + 384 кг = 3016 кг > 3 т. **9.8. Порада.** Нехай напри-





кінці всіх сум стоять різні цифри. Тоді сума цих сум закінчується цифрою 5 (бо $0 + 1 + 2 + \dots + 9 = 45$). З іншого боку, обидві суми цифр від 1 до 10 та їхніх місць (від 1 до 10) закінчуються нулем. Отримали суперечність.

9.9. Порада. При діленні на 11 маємо 11 остач $\{0, 1, 2, \dots, 10\}$. Тоді, за принципом Діріхле, з 12 чисел хоча б два при діленні на 11 мають однакові остачі. Різниця цих чисел – шукане число.

9.10. Порада. При діленні на 100 маємо остачі 0, 1, 2, ..., 99 – всього 100, а задано 101 число. Тоді принаймні хоча б два з них мають однакові остачі при діленні на 100, а різниця таких двох чисел кратна числу 100.

9.11. Порада. Розгляньте два випадки: коли серед даних чисел міститься число, кратне 5, і коли такого числа немає.

- У останньому випадку маємо 5 чисел, що можуть мати чотири види остач при діленні на 5 (1, 2, 3, 4), тобто хоча б два з них мають однакові остачі й іхня різниця ділиться на 5;
- див. приклад 5.

9.12. Порада. Див. приклад 7.

9.13. Порада. Розглянемо 5 «кліток» із номерами 0, 1, 2, 3, 4. Нехай номер на «клітці» відповідає кількості знайомих. По цих «клітках» будемо розміщати осіб даної групи за кількістю знайомих юму людей у даній групі. Далі розгляньте такі два випадки.

- У групі є людина, яка нікого не знає. Тоді 5 осіб розподіляємо по чотирьох «клітках» із номерами 0, 1, 2, 3.
- У групі немає людини, яка нікого не знає. Тоді 5 осіб розподіляємо по чотирьох «клітках» із номерами 1, 2, 3, 4.

9.14. Порада. 1) Якщо всі учні товаришують між собою, то кожен з них товаришує з 24 іншими, що задовольняє умову задачі. 2) Не всі учні товаришують між собою. Оберемо двох, які не товаришують. З інших 23-х учнів кожен товаришує з одним із цих двох учнів (бо інакше була б трійка, серед якої немає другів). Врахуємо, що $23 = 11 \cdot 2 + 1$. Тоді, за принципом Діріхле, хоча б в одного учня з обраної пари 12 друзів.

9.15. Порада. Візьмемо таке k , щоб $10^k > n$, і розглянемо всі цілі числа, більші за $1\ 234\ 056\ 789 \cdot 10^k$ і менші від $1\ 234\ 056\ 789 \cdot 10^k + 10^k$. Таких чисел більше ніж n . Отже, принаймні два з них мають однакові остачі при діленні на n .

9.16. Ні. Порада. Наведемо контрприклад – числа 1, ..., 100. Розгляньте групи чисел з однаковими остачами. Серед них 14 чисел, кратних числу 7 (7, 14, ..., 98); 15 чисел дають при діленні на 7 остачу 1 (1, 8, ..., 99); 15 чисел дають остачу 2 (2, 9, 16, ..., 100); ...

9.17. Порада. Розглянемо 51 клітинку. У першій розмістимо всі числа, що закінчуються 00, у другій – 01 або 99, у третьій – 02 або 98, ..., у 51-й – 50. За принципом Діріхле, хоча б в одній з цих клітинок буде не менше як два числа. Сума або різниця (для клітинок № 1 та № 51) кратна числу 100.

9.18. Порада. За умовою a не ділиться на b . Тоді при діленні a^k на b маємо $b - 1$ остач ($1, \dots, b - 1$). Тоді серед b чисел $\{1, a, a^2, \dots, a^b\}$ знайдеться принаймні два, що при діленні на b дають однакову остачу. Нехай це числа a^m і a^n , де $m < n$. Тоді $(a^n - a^m) : b$, але $a^n - a^m = a^m(a^{n-m} - 1)$, де a^m не ділиться на b за умовою. Звідси





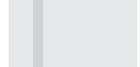
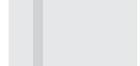
$(a^{n-m} - 1) : b$. **9.19.** *Порада.* Розглянемо два випадки. 1) Нехай є учень, який розв'язав хоча б 6 задач. Кожну з двох інших задач, за умовою, розв'язало по 5 учнів, разом $5 + 5 = 10$. Але учнів було $8 < 10$, отже, знайдеться хоча б один з них, що розв'язав обидві з указаних задач. 2) Нехай кожен з учнів розв'язав не більше як 5 задач. Тоді разом вони розв'язали не більше як $5 \cdot 8 = 40$ задач. За умовою кожну задачу розв'язало по 5 учнів, тоді всього розв'язків повинно бути $8 \cdot 5 = 40$. Тоді маємо, що кожен з 8 учнів розв'язав рівно по 5 задач. Два набори по п'ять чисел з можливих восьми 1, 2, ..., 8 мають спільні елементи, тобто є два учні, які розв'язали одну й ту саму задачу. **9.20.** *Порада.* Розгляньте 5 чисел: $a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, a_1 + a_2 + a_3 + a_4, a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$. Якщо одне з них кратне числу 5, то твердження умови виконується. Якщо ж ні, то при діленні на 5 вони можуть мати остачі {1, 2, 3, 4}. Тоді, за принципом Діріхле, хоча б два з указаних п'яти чисел мають однакові остачі. Різниця таких двох чисел кратна числу 5 і задовільняє умову. **9.21.** *Порада.* Введіть систему координат з початком в одному з вузлів, осями вздовж ліній сітки та одиничним відрізком, що дорівнює стороні клітинки. Якщо позначати парні числа як П, а непарні – як Н, то координати довільного вузла нашої сітки матимуть вигляд $(\Pi; \Pi)$, або $(\text{Н}; \text{Н})$, або $(\Pi; \text{Н})$, або $(\text{Н}; \Pi)$. Тобто хоча б дві із заданих п'яти точок мають координати однакового виду. Нехай це будуть точки $(x_1; y_1)$ і $(x_2; y_2)$. Тоді середина відрізка, що сполучає ці точки, має за координати цілі числа: $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$.

9.22. *Порада.* Нехай $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n+1}\}$ – множина даних чисел. Кожне із цих чисел запишемо у вигляді $a_i = 2^k b_i$, де b_i – непарне число, причому $b_i \in \{0, 1, 2, \dots\}$, $b_i < 2n$ (бо за умовою натуральне число $a_i < 2n$). Усього непарних чисел, менших від $2n$, маємо n , множина $B = \{b_1, b_2, b_3, \dots, b_{n+1}\}$ містить $n + 1$ чисел. Тоді хоча б два числа з множини B збігаються. Відповідні їм числа з множини A діляться одне на одне без остачі (більше на менше). **9.23.** *Порада.* Назовемо депутатів ворогами, якщо один вдарив іншого. Доведемо методом математичної індукції (див. § 8), якщо у парламенті $N > 3n - 2$ депутатів, то можна створити комісію з n депутатів, серед яких немає ворогів. 1) При $n = 1$ твердження очевидно виконується – база індукції. 2) Нехай твердження виконується при $n = k - 1$. Доведемо його для $n = k$. Зрозуміло, що число депутатів дорівнює числу тумаків. Тоді, за принципом Діріхле, знайдеться депутат, який отримав не більше як один тумак. У нього не більше як двоє ворогів (той, хто його вдарив, і той, кого він вдарив). Направимо цього депутата до комісії, а його ворогів – у відпустку. У парламенті залишилося $N - 3 > 3(k - 1) - 2$ депутатів, з яких (за припущенням) можна скласти комісію з $k - 1$ депутатів, що не лупцювали один одного. Разом з раніше введеним до комісії депутатом маємо комісію з





k осіб. Індукційний перехід доведено. 3) Шукане твердження доведено. Маємо: $2012 > 2008 = 3 \cdot 670 - 2$. Отже, з 2012 вказаних за умовою депутатів можна скласти шукану комісію. **9.24. Порада.** Нехай за перший день року учень розв'язав a_1 задач, за перші два дні – a_2 задач, ..., за перші 77 днів (11 тижнів) – a_{77} задач. Розглянемо дві послідовності чисел: $\{a_1, a_2, \dots, a_{77}\}$ і $\{a_1 + 20, a_2 + 20, \dots, a_{77} + 20\}$. Разом у двох послідовностях маємо 154 числа; $a_{77} \leq 12 \cdot 11 = 132$, тоді $a_{77} + 20 \leq 152$. Серед 154 чисел немає числа більшого за 152, отже, в об'єднанні двох послідовностей знайдеться два рівних між собою числа. Проте у першій послідовності всі числа різні (бо кожного дня учень розв'язував принаймні одну задачу). Тоді її у другій послідовності всі числа різні. Звідси маємо, що якесь число a_k з першої послідовності дорівнює деякому числу $a_m + 20$ другої послідовності. Звідси $a_k - a_m = 20$. Щ. в. д. **9.25. Порада.** Введемо систему координат в одному з вузлів, осями вздовж сторін клітинки й одиничним відрізком, що дорівнює довжині сторони клітинки. Зрозуміло, що координати вузлів клітинок є цілими числами, парними (П) і непарними (Н). Тоді координати заданих п'яти точок можна представити у вигляді: (П; П), або (П; Н), або (Н; П), або (Н; Н). За принципом Діріхле, хоча б дві з даних п'яти точок мають координати одного виду. Координати середини відрізка з кінцями в цих точках будуть цілими числами (бо сума абсцис та сума ординат кінців цього відрізка – парні числа).





ЗМІСТ

Передмова – 3

Розділ I. АРИФМЕТИКА ЦІЛИХ ЧИСЕЛ

- § 1.** Означення і найпростіші властивості подільності – 5. Прості і складені числа – 5. Властивості подільності – 6. Зверніть увагу на парність – 8. Розкладання на прості множники і повний квадрат числа – 9. Найбільший спільний дільник і найменше спільне кратне – 10. *Функція Ейлера – 12. Про подільність суми і різниці двох чисел – 13. *Завдання 1* – 17.
- § 2.** Запис числа. Ознаки подільності – 22. Позиційні і непозиційні системи числення – 22. Двійкова система числення – 25. *Гра в три купки камінців – 28. Десяткова система числення та ознаки подільності – 29. Ознаки подільності на 3 та на 9 – 32. Число Шахерезади і ознаки подільності на 7, 11 і 13 – 33. *Завдання 2* – 35.
- § 3.** Арифметика цифр і степінь числа – 39. *Завдання 3* – 41.
- § 4.** Діофантові рівняння – 42. Лінійні діофантові рівняння – 42. Нелінійні діофантові рівняння – 49. Велика теорема Ферма – Узагальнення теореми Піфагора – 49. Спосіб розкладання на множники. Теорема Безу – 51. Парність і подільність приходять на допомогу – 55. *Завдання 4* – 58.
- § 5.** Арифметика цифр у комбінаторних задачах – 60. Правило множення – 60. Правило додавання – 60. Перестановки – 63. Розміщення – 64. Комбінації (сполучення) – 65. Властивості комбінацій – 66. Біном Ньютона – 68. *Завдання 5* – 72.

Розділ II. ДІЛЕННЯ З ОСТАЧЕЮ. ПОРІВНЯННЯ

- § 6.** Ділення на натуральне число з остачею – 75. Узагальнення поняття ділення з остачею – 75. Про прості числа та їх кількість – 79. Про степінь числа і остачі – 80. Алгоритм Евкліда – 82. *Завдання 6* – 83.
- § 7*.** Арифметика остач за модулем – 85. Основні поняття – 86. Властивості порівнянь – 89. Мала теорема Ферма – 95. Порівняння і ознаки подільності – 96. *Завдання 7* – 99.

Розділ III. НЕСТАНДАРТНІ МЕТОДИ У РОЗВ'ЯЗУВАННІ ЗАДАЧ НА ЦІЛІ ЧИСЛА

- § 8*.** Метод математичної індукції – 102. Формула бінома Ньютона – 105. *Завдання 8* – 106.

- § 9.** Принцип Діріхле – 107. *Завдання 9* – 112.

Додаток 1. Дворівнева програма курсу за вибором «Працюємо на множині цілих чисел» – 114. *Додаток 2.* Таблиця простих чисел, не більших за 6000 – 119. *Додаток 3.* Деякі степені чисел 2, 3 і 5 – 120. *Додаток 4.* Таблиця факторіалів чисел від 1 до 16 – 120. Список використаної та рекомендованої літератури – 121.

ВІДПОВІДІ ТА ПОРАДИ – 122.

