РАЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Квадратне рівняння
$ax^2 + bx + c = 0$ при $a \neq 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \quad D = b^2 - 4ac$$

- $D < 0$: немає розв'язків;
- $D = 0$: $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$ – єдиний розв'язок;
- $D > 0$: $x_1 \neq x_2$ – два розв'язки.

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ при $x \in R$.

Якщо b – *парне*:

$$x_{1,2} = \frac{\frac{-b}{2} \pm \sqrt{\frac{D}{4}}}{a}, \quad \frac{D}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac$$

Приклад 1. $x^2 - 16x - 8 = 0$.

$\dfrac{D}{4} = 8^2 + 8 = 8(8 + 1) = 2^3 \cdot 3^2$;

$x_{1,2} = 8 \pm 6\sqrt{2}$.

Відповідь: $8 \pm 6\sqrt{2}$.

Теорема Вієта

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}, \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}; \end{cases} \quad \text{за умови } D \geqslant 0.$$

Теорема, обернена до теореми Вієта

Довільні числа m і n ($\{m, n\} \subset R$) – корені рівняння $x^2 - (m + n)x + m \cdot n = 0$

Приклад 2. $x^2 - 2x - 8 = 0$, $\frac{D}{4} = 9 > 0$,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ x_1 x_2 = -8; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -2, \\ x_2 = 4. \end{cases} \quad \begin{cases} -2 + 4 = 2, \\ -2 \cdot 4 = -8; \end{cases}$$

Відповідь: -2; 4.

Вузлик на згадку

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$,

де $x_{1,2}$ – корені, $x \in R$.

Біквадратне рівняння

$ax^4 + bx^2 + c = 0$ при $a \neq 0$

заміною $x^2 = t \geqslant 0$ зводиться до квадратного

Приклад 3. $x^4 - 2x^2 - 8 = 0$.

$x^2 = t \geqslant 0$, $t^2 - 2t - 8 = 0$,

за теоремою Вієта $t_1 = -2$ – ст. к., $t_2 = 4 > 0$.

$x^2 = 4 \Leftrightarrow |x| = 2 \Leftrightarrow x \in \{\pm 2\}$.

Відповідь: ± 2.

Приклад 4.

$$\underbrace{(2x^2 - 3x + 1)^4}_{t^2} - 2\underbrace{(2x^2 - 3x + 1)^2}_{t \geqslant 0} - 8 = 0.$$

$$t = \left[\begin{array}{l} -2 - \text{ст. к.}, \\ 4 > 0, \end{array}\right.$$

$$(2x^2 - 3x + 1)^2 = 4 \Leftrightarrow \left|2x^2 - 3x + 1\right| = 2 \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} 2x^2 - 3x + 1 = 2, \\ 2x^2 - 3x + 1 = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^2 - 3x - 1 = 0, \\ 2x^2 - 3x + 3 = 0. \end{array}\right.$$

Відповідь: $\frac{3 \pm \sqrt{17}}{4}$.

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0 \text{ при } a \neq 0$$
заміною $x^n = t$ зводиться до квадратного

Приклад 5. $x^6 - 2x^3 - 8 = 0$

$x^3 \triangleq t \in R,\ t_{1,2} \in \{-2;\ 4\}.$

$$\left[\begin{array}{l} t^3 = -2, \\ t^3 = 4; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\sqrt[3]{2}, \\ x = \sqrt[3]{4}. \end{array}\right.$$

Відповідь: $-\sqrt[3]{2};\ \sqrt[3]{4}$.

Ціле раціональне рівняння

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$
при $a_n \neq 0,\ \ a_i \in R,\ i \in N$

- має не більше ніж n коренів;
- якщо $n = 2k - 1,\ k \in N$, то має хоча б один дійсний корінь;
- якщо $n = 2k,\ k \in N$, то може не мати дійсних коренів.

Теорема Безу

Якщо $P_n(x) \triangleq a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ поділити на $x - c$, то в остачі матимемо $P_n(c)$.

- Якщо c – корінь рівняння $P_n(x) = 0$, то
$$P_n(x) = (x - c)P_{n-1}(x).$$
- Якщо рівняння $P_n(x) = 0$ має раціональний корінь $\frac{p}{q}$, то p – дільник a_0, а q – дільник a_n.
- Якщо рівняння $P_n(x) = 0$ має цілий корінь, то він є дільником $\frac{a_0}{a_n}$, де $\frac{a_0}{a_n} \in Z$.

Приклад 6. $x^3 - 3x - 2 = 0.$

$a_0 = -2$, можливі цілі корені: $\pm 1;\ \pm 2$.

Перевіркою: $x = 2$ – корінь.

Ділимо $x^3 - 3x - 2$ на $x - 2$

$$
\begin{array}{rl|l}
- & x^3 + 0\cdot x^2 - 3x - 2 & x - 2 \\
 & x^3 - 2x^2 & \overline{x^2 + 2x + 1} \\
\hline
 & \quad - 2x^2 - 3x & \\
 & \quad\;\; 2x^2 - 4x & \\
\hline
 & \qquad\quad - x - 2 & \\
 & \qquad\quad\;\; x - 2 & \\
\hline
 & \qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

Маємо: $(x - 2)(x + 1)^2 = 0$.

Відповідь: 2; –1.

Приклад 7. $x^4 - 2x^3 - 9x^2 + 2x + 8 = 0$.

Перевіркою: $x = \pm 1$ – корені.
Ділимо на $(x - 1)(x + 1)$

$$
\begin{array}{rl|l}
- & x^4 - 2x^3 - 9x^2 + 2x + 8 & x^2 + 0\cdot x - 1 \\
 & x^4 + 0\cdot x^3 - x^2 & \overline{x^2 - 2x - 8} \\
\hline
- & \quad - 2x^3 - 8x^2 + 2x & \\
 & \qquad - 2x^3 + 0\cdot x^2 + 2x & \\
\hline
 & \qquad\quad - 8x^2 + 0\cdot x + 8 & \\
 & \qquad\quad - 8x^2 + 0\cdot x + 8 & \\
\hline
 & \qquad\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

Маємо: $(x - 1)(x + 1)(x^2 - 2x - 8) = 0$.

Відповідь: ±1; –2; 4.

РІВНЯННЯ ВИЩИХ СТЕПЕНІВ

I. $(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) = m$, якщо $a + b = c + d$

Заміна $x^2 + (a + b)x + k \triangleq t$ (де $k = ab$ або cd).

Приклад 8. $(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4) = 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x - 1)(x - 4)(x - 2)(x - 3) = 3 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (\underbrace{x^2 - 5x + 4}_{t})(\underbrace{x^2 - 5x + 6}_{t+2}) = 3;\ t \in \{1;\ -3\}.$$

Відповідь: $\dfrac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$.

II. $\boxed{(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) = nx^2, \text{ якщо } ab = cd}$

Ділимо на $x^2 \neq 0$, потім $x + k + \dfrac{ab}{x} \triangleq t$,

де $k = a + b$ або $c + d$.

Приклад 9. $(x + 2)(x + 3)(x + 8)(x + 12) = 4x^2$

$(x + 2)(x + 12)(x + 3)(x + 8) = 4x^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x^2 + 14x + 24}{x}\right)\left(\frac{x^2 + 11x + 24}{x}\right) = \frac{4x^2}{x^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\left(x + 14 + \frac{24}{x}\right)}_{t+3}\underbrace{\left(x + 11 + \frac{24}{x}\right)}_{t} = 4,\ t \in \{-4;\ 1\}.$$

Відповідь: -4; -6; $\dfrac{-15 \pm \sqrt{129}}{2}$.

III. СИМЕТРИЧНІ

IIIa. $\boxed{ax^3 + bx^2 + bx + a = 0}$

$$a(x^3 + 1) + bx(x + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1, \\ a(x^2 - x + 1) + bx = 0. \end{array}\right.$$

Приклад 10. $2x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = 0$.

Згрупуємо: $2(x^3 + 1) + 3x(x + 1) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1, \\ 2(x^2 - x + 1) + 3x = 0. \end{array}\right.$$

Відповідь: -1.

IIIб. $\boxed{ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0}$

Ділимо на $x^2 \neq 0$, далі $x + \frac{1}{x} \triangleq t$.

Приклад 11.

$$\underline{\underline{x^4}} + \underline{5x^3} - 22x^2 + \underline{5x} + \underline{\underline{1}} = 0 \quad \Big| : x^2 \neq 0$$

$$\underline{\underline{x^2}} + \underline{5x} - 22 + \frac{5}{\underline{x}} + \frac{1}{\underline{\underline{x^2}}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2}_{t^2} - 2 + 5\underbrace{\left(x + \frac{1}{x}\right)}_{t} - 22 = 0.$$

Відповідь: $\frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$; $-4 \pm \sqrt{15}$.

V. ЗВОРОТНІ

$$\boxed{ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0, \text{ якщо } \frac{e}{a} = \frac{d^2}{b^2}}$$

Ділимо на $x^2 \neq 0$, далі $x + \frac{d}{b} \cdot \frac{1}{x} \triangleq t$.

Приклад 12. $\underline{x^4} - \underline{\underline{7x^3}} + 6x^2 + \underline{\underline{21x}} + \underline{9} = 0$.

Перевіримо: $\frac{9}{1} = \left(\frac{21}{-7}\right)^2$. Ділимо на x^2:

$$\underline{x^2} - \underline{\underline{7x}} + 6 + \frac{21}{\underline{\underline{x}}} + \frac{9}{\underline{x^2}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\left(x - \frac{3}{x}\right)^2}_{t^2} + 2 \cdot 3 - 7\underbrace{\left(x - \frac{3}{x}\right)}_{t} + 6 = 0.$$

Відповідь: $2 \pm \sqrt{7}$; $\frac{3 \pm \sqrt{21}}{2}$.

V. ШУКАЙТЕ ПОВНИЙ КВАДРАТ

Va. $\boxed{x^4 + 2ax^3 + (a^2 + b)x^2 + abx + c = 0} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x^2 + ax)^2 + b(x^2 + ax) + c = 0$, далі $x^2 + ax \triangleq t$.

Проте можна почати з

$$x^4 + 2ax^3 = (x^2 + ax)^2 - a^2x^2 \ldots$$

Приклад 13. $x^4 + 6x^3 + 5x^2 - 12x + 3 = 0$.

$2a = 6$, $ab = -12$, перевіримо $a^2 + b \stackrel{?}{=} 5$.

I спосіб.

Якщо $2a = 6$, $ab = -12$, $a = 3$, $b = -4$, тоді $a^2 + b = 3^2 + (-4) = 5$. Отже, $x^2 + 3x \triangleq t$.

II спосіб.

1) $x^4 + 6x^3 = x^4 + 2 \cdot x^2(3x) = (x + 3x)^2 - 9x^2$.

2) $-9x^2 + 5x^2 - 12x = -4x^2 - 12x = -4(x^2 + 3x)$.

3) $\underbrace{(x^2 + 3x)^2}_{t^2} - 4(\underbrace{x^2 + 3x}_{t}) + 3 = 0$, $t \in \{1; 3\}$.

Відповідь: $\dfrac{-3 \pm \sqrt{21}}{2}$; $\dfrac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$.

Vб. $\boxed{x^4 + 2ax^3 + (a - 1)x^2 - 2bx - b^2 = 0} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x^2 + ax)^2 - (x + b)^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |x^2 + ax| = |x + b| \Leftrightarrow x^2 + ax = \pm(x + b)$.

Приклад 14. $x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x - 1 = 0$.

$-2b = 2$. Перевіримо $a - 1 \stackrel{?}{=} 3$, $-b^2 \stackrel{?}{=} -1$

Якщо $2a = 4$, $2 = -2b$, то $a = 2$, $b = -1$,

тоді $a - 1 = 3$, $-b^2 = -1$.

$$(x^2 + 2x)^2 - (x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 + 2x = x - 1, \\ x^2 + 2x = -x + 1. \end{array}\right.$$

Відповідь: $\dfrac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$.

Vв. $\boxed{\left(\frac{1}{x+a}\right)^2+\left(\frac{1}{x+a+1}\right)^2=b}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x+a+1}\right)^2=b-\frac{2}{(x+a)(x+a+1)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\underbrace{\left(\frac{1}{(x+a)(x+a+1)}\right)^2}_{t^2}=b-\underbrace{\frac{2}{(x+a)(x+a+1)}}_{2t}.$$

Приклад 15. $\left(\frac{1}{x+1}\right)^2+\left(\frac{1}{x+2}\right)^2=3.$

$x+2=(x+1)+1$, тому

$$\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)^2=3-\frac{2}{(x+1)(x+2)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\underbrace{\left(\frac{1}{(x+1)(x+2)}\right)^2}_{t^2}=3-\underbrace{\frac{2}{(x+1)(x+2)}}_{2t},\quad t\in\{-3;\,1\}.$$

Відповідь: $\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$.

Vг. $\boxed{x^2+\frac{a^2x^2}{(x\pm a)^2}=b}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\left(x\mp\frac{ax}{x\pm a}\right)^2=b\mp 2x\cdot\frac{ax}{x\pm a}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\underbrace{\left(\frac{x^2}{x\pm a}\right)^2}_{t^2}=b\mp 2a\cdot\underbrace{\frac{x^2}{x\pm a}}_{t}.$$

Приклад 16. $x^2+\frac{9x^2}{(x+3)^2}=7\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\left(x-\frac{3x}{x+3}\right)^2=7-2\cdot x\cdot\frac{3x}{x+3}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\left(\frac{x^2}{x+3}\right)^2}_{t^2} = 7 - 6\underbrace{\frac{x^2}{x+3}}_{t}, \quad t \in \{-7;\ 1\}.$$

Відповідь: $\dfrac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$.

VI. УПІЗНАЙТЕ ЗАМІНУ

VIa. $$\boxed{\frac{ax}{px^2+nx+q} + \frac{bx}{px^2+mx+q} = c}$$

Чисельник і знаменник кожного з дробів ділимо на $x \neq 0$, маємо: $\dfrac{a}{px+n+\dfrac{q}{x}} + \dfrac{b}{px+m+\dfrac{q}{x}} = c$,

далі $px + n + \dfrac{q}{x} \triangleq t$ або $px + m + \dfrac{q}{x} \triangleq t$.

Приклад 17. $\dfrac{2x}{3x^2 - x + 2} - \dfrac{7x}{3x^2 + 5x + 2} = 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3x - 1 + \dfrac{2}{x}} - \frac{7}{3x + 5 + \dfrac{2}{x}} = 1;\ 3x - 1 + \frac{2}{x} \triangleq t.$$

$$\frac{2}{t} - \frac{7}{t+6} = 1,\ t \in \{1;\ -12\}.$$

Відповідь: $\dfrac{-11 \pm \sqrt{97}}{6}$.

VIб. $$\boxed{(x+a)^4 + (x+b)^4 = c}$$

або

$$\boxed{(x+a)^5 - (x+b)^5 = c}$$

Розв'язуємо заміною $x + \dfrac{a+b}{2} \triangleq t$.

Приклад 18. $(x+5)^4 + (x+3)^4 = 2$.

$a = -5$, $b = -3$, тоді $x - 4 \triangleq t$. $\quad \dfrac{-5-3}{2} = -4$

Маємо: $(t+1)^4 + (t-1)^4 = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (t^2 + 2t + 1)^2 + (t^2 - 2t + 1)^2 = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2t^4 + 2 \cdot 4t^2 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2t^2 = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t^2(t^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \Leftrightarrow x = 4.$

Відповідь: 4.

VIв. ІЗ ВЗАЄМНО ОБЕРНЕНИМИ ВИРАЗАМИ

$$\boxed{a\frac{f_1(x)}{f_2(x)} + b\frac{f_2(x)}{f_1(x)} = c}$$

Заміна $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} \triangleq t.$

Приклад 19.

$$\frac{3x^2 - 9x}{2} - \frac{12}{x^2 - 3x} = 3 \Leftrightarrow 3\underbrace{\frac{x^2 - 3x}{2}}_{t} - 6\underbrace{\frac{2}{x^2 - 3x}}_{\frac{1}{t}} = 3;$$

$t \in \{2; -1\}$.

Відповідь: ± 1; 2; 4.

VIг. ШУКАЙТЕ СПІЛЬНИЙ ВИРАЗ ДЛЯ ЗАМІНИ

Приклад 20. $\dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 2x + 2} + \dfrac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x + 3} = \dfrac{7}{6}$,

$x^2 + 2x + 2 \triangleq t$. Маємо: $\dfrac{t-1}{t} + \dfrac{t}{t+1} = \dfrac{7}{6} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{2t^2 - 1}{t(t+1)} = \frac{7}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} t \notin \{0; -1\}, \\ 5t^2 - 7t - 6 = 0; \end{cases}$$

$t \in \{2; -0{,}6\}$.

Відповідь: 0; -2.

VII. ОДНОРІДНЕ

$$\boxed{af^2(x) + bf(x)g(x) + cg^2(x) = 0}$$

Ділимо на $g^2(x)$, далі $\dfrac{f(x)}{g(x)} \triangleq t$.

Приклад 21.

$(2x^2 - x + 1)^2 + x^2(2x^2 - x + 1) - 6x^4 = 0 \mid : \ (x^2)^2$

$$\underbrace{\left(\frac{2x^2 - x + 1}{x^2}\right)^2}_{t^2} + \underbrace{\frac{2x^2 - x + 1}{x^2}}_{t} - 6 = 0; \ t \in \{-3;\ 2\}.$$

Відповідь: 1.

VIII. А МОЖЕ ДРОБИ СКОРОЧУЮТЬСЯ?

Приклад 22. $\dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 + 5x + 6} + \dfrac{x^2 - 2x - 24}{x^2 + x - 12} = 4 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-2)(x+3)}{(x+2)(x+3)} + \frac{(x+4)(x-6)}{(x+4)(x-3)} = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \notin \{-3;\ -4\}, \\ \dfrac{x-2}{x+2} + \dfrac{x-6}{x-3} = 4. \end{cases}$$

Відповідь: 2; −4,5.

IX. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯННЯ ВІДНОСНО ЙОГО КОЕФІЦІЄНТІВ

Приклад 23. $x^3 + 2ax^2 + a^2x + a - 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^2x + a(2x^2 + 1) + x^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0, \\ a = 1; \end{cases} \\ \begin{cases} x \neq 0, \\ a \in \left\{-x - 1 - \dfrac{1}{x}; -x + 1\right\} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 1, \\ x = 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x \neq 0, \\ \left[\begin{array}{l} x^2 + (a+1)x + 1 = 0, \\ x = 1 - a. \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right.$$

Аналіз:

$x = 1 - a = 0$ при $a = 1$

$x^2 + (a+1)x + 1\big|_{x=0} \neq 0$

$D = (a + 1)^2 - 4 < 0$ при $|a + 1| < 2$, $a \in (-3;\ 1)$

Відповідь: якщо $a \in (-3;\ 1]$, то $x = 1 - a$;
якщо $a \in \{-\infty;\ -3] \cup (1;\ \infty)$, то

$$x \in \left\{\frac{-(a+1) \pm \sqrt{a^2 + 2a - 3}}{2};\ 1 - a\right\}.$$

Приклад 24. $x^4 - 2x^2 + 4\sqrt{3}x + 4x - 3 - 2\sqrt{3} = 0.$

Якщо $\sqrt{3} \triangleq a$ $(a > 0)$, маємо:

$a^2 - 2(2x - 1)a - (x^4 - 2x^2 + 4x) = 0$, тоді

$D = (x^2 + 1)^2$. Далі одержимо

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a = x^2 + 2x, \\ a = -x^2 + 2x - 2, \end{array}\right. \\ a = \sqrt{3}. \end{cases}$$

Відповідь: $-1 \pm \sqrt{1 + \sqrt{3}}$.

X. $\boxed{f(z) = f(t),\ f(x) - \text{монотонна}}$

Якщо $f(z) = f(t)$, то $z = t$.

Приклад 25. $5(x - 2)^3 + x = 5(2x - 2)^3 + 2x$;

$f(t) = 5(t - 2)^3 + t$ строго зростає і

$f(x) = f(2x) \Leftrightarrow x = 2x \Leftrightarrow x = 0.$

Відповідь: 0.

XI. УГАДАЙ РОЗВ'ЯЗОК І ДОВЕДИ ЙОГО ЄДИНІСТЬ

У доведенні допоможуть факти:

- якщо $\frac{a}{b} \geqslant 0$, то $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2$; $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 2$ при $\frac{a}{b} = 1$;
- якщо $y = ax^2 + bx + c$, то

  $y \geqslant y_B$ при $a > 0$;

  $y \leqslant y_B$ при $a < 0$;

  $x_B = -\frac{b}{xa}$

  $y_B = y(x_B)$
- $|x - a| + |x - b| \geqslant |a - b|$ при $x \in R$;
- $|x - a| + |x - b| = |a - b| \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow x \in [\min\{a; b\}; \max\{a; b\}]$;
- якщо $f(x)$ строго зростає, а $\varphi(x)$ – спадає, то рівняння $f(x) = \varphi(x)$ має не більше ніж один розв'язок;
- якщо $f(x)$ строго монотонна, а $\varphi(x) = \text{const}$, то рівняння $f(x) = \varphi(x)$ має не більше ніж один розв'язок.

Приклад 26. $\frac{x^2 + 1}{x} = -x^2 + 2x + 1.$

Оскільки $\frac{x^2 + 1}{x} = x + \frac{1}{x}$,

то $\underbrace{x + \frac{1}{x}}_{\geqslant 2} = -(\underbrace{x^2 - 2x - 1}_{\leqslant 2}) \Leftrightarrow$

$y = -(x^2 - 2x - 1)$

$x_B = 1$

$y_B = y(1) = 2$

$y \geqslant y_B \Leftrightarrow y \geqslant 2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{x} = 2, \\ -(x^2 - 2x - 1) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Відповідь: 1.

Приклад 27. $x^{13} - 2 = -2x^5 + 1.$

$x = 1$ – очевидний розв'язок.

Оскільки $f(x) = x^{13} - 2$ – зростаюча;
$\varphi(x) = -2x^5 + 1$ – спадна,
тоді $x = 1$ – єдиний розв'язок.

Відповідь: 1.

Приклад 28.

$$\underbrace{|x-3| + |x+1|}_{\geqslant |3-(-1)|=4} = \underbrace{-x^2 + 2x + 3}_{\leqslant 4} \Leftrightarrow$$

$y = -x^2 + 2x + 3$
$x_B = 1$
$y_B = y(1) = 4$
$y \leqslant y_B = 4$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |x-3| + |x+1| = 4, \\ -x^2 + 2x + 3 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-1;\ 3], \\ x = x_B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Відповідь: 1.

ІРРАЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ

I. $\sqrt{f(x)} = \varphi(x) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ \varphi(x) \geqslant 0, \\ f(x) = \varphi^2(x) \end{cases} \underset{\text{бо } f(x)=\varphi^2 \geqslant 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \varphi(x) \geqslant 0, \\ f(x) = \varphi^2(x) \end{cases}$$

Вузлик на згадку

Під час піднесення до квадрата слідкуємо за невід'ємністю обох частин рівняння.

Приклад 29.

$$\sqrt{x^2 - 9} = 1 - x \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x \geqslant 0, \\ x^2 - 9 = x^2 - 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant 1, \\ x = 5. \end{cases}$$

Відповідь: $\varnothing$.

II. $$\sqrt{f(x)} = \sqrt{\varphi(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = \varphi(x), \\ f(x) \geqslant 0, \\ \varphi(x) \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = \varphi(x), \\ f(x) \geqslant 0 \end{cases}$$

Приклад 30. $\sqrt{x^2 - x - 6} = \sqrt{-2x} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x \geqslant 0, \\ x^2 - x - 6 = -2x; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant 0, \\ x \in \{-3;\ 2\}. \end{cases}$$

Відповідь: -3.

III. $$\sqrt{f(x)} \cdot \sqrt{\varphi(x)} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) = 0, \\ \varphi(x) \geqslant 0; \end{cases} \\ \begin{cases} \varphi(x) = 0, \\ f(x) \geqslant 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

Приклад 31.

$$\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x^2 - 4} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - 1 = 0, \\ x^2 - 4 \geqslant 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 - 4 = 0, \\ x \geqslant 1; \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1, \\ x^2 \geqslant 4; \end{cases} \\ \begin{cases} x = \pm 2, \\ x \geqslant 1. \end{cases} \end{array} \right.$$

Відповідь: 2.

IV. $$\sqrt{f(x)} + \sqrt{\varphi(x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0, \\ \varphi(x) = 0 \end{cases}$$

Приклад 32. $\sqrt{x^2 + x - 6} + \sqrt{x^2 - x - 12} = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 6 = 0, \\ x^2 - x - 12 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \{-3;\ 2\}, \\ x \in \{4;\ -3\}; \end{cases} \Leftrightarrow x = -3.$$

Відповідь: -3.

Приклад 33. $\underbrace{\sqrt{x-3}}_{\geqslant 0}+\underbrace{\sqrt{x^2-9}}_{\geqslant 0}=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-3=0, \\ x^2-9=0; \end{cases} \Leftrightarrow x=3.$$

Відповідь: 3.

V. ОЧЕВИДНА ЗАМІНА

Аналогічно до розв'язування раціональних рівнянь на с. 11–12.

Приклад 34. $\underbrace{\sqrt[5]{\dfrac{16x}{x-1}}}_{\triangleq t}+\underbrace{\sqrt[5]{\dfrac{x-1}{16x}}}_{=\frac{1}{t}}=\dfrac{5}{2}.$

$$t+\frac{1}{t}=2+\frac{1}{2},\ t\in\left\{2;\ \frac{1}{2}\right\}.$$

Відповідь: 2; $-(511)^{-1}$.

Вузлик на згадку

$$x+\frac{1}{x}=a+\frac{1}{a} \Leftrightarrow x\in\left\{a;\ \frac{1}{a}\right\}.$$

Приклад 35. $\underbrace{\sqrt{3x^2+5x+8}}_{\sqrt{t^2+7}}-\underbrace{\sqrt{3x^2+5x+1}}_{t\geqslant 0}=1.$

$$\begin{cases} \sqrt{t^2+7}=\underbrace{1+t}_{>0}, \\ t\geqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2+7=t^2+2t+1, \\ t\geqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow t=3.$$

Відповідь: 1; $-\dfrac{8}{3}$.

Приклад 36. $\dfrac{x\sqrt[5]{x}-1}{\sqrt[5]{x^3}-1}+\dfrac{\sqrt[5]{x^3}-1}{\underbrace{\sqrt[5]{x}}_{t}-1}=16;$

$$\frac{t^6-1}{t^3-1}+\frac{t^3-1}{t-1}=16 \Leftrightarrow \begin{cases} t=2, \\ t\neq 1. \end{cases}$$

Далі як на с. 5–6: $(t-2)(t^2+3t+7)=0$.

Відповідь: 2^5.

Приклад 37. $\dfrac{\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[3]{3-x}}{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{3-x}}=x-2;$

1) $\underline{x=3}$ – розв'язок.

2) При $\underline{x\neq 3}$ поділимо чисельник і знаменник дробу на $\sqrt[3]{3-x}$:

$$\frac{\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{3-x}}-1}{\underbrace{\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{3-x}}}_{t\neq -1}+1}=x-2; \quad \begin{cases} t^3=\dfrac{x-1}{3-x}, \\ \dfrac{t-1}{t+1}=x-2; \end{cases} \quad \begin{cases} x=\dfrac{3t^3+1}{t^3+1}, \\ \dfrac{t-1}{t+1}=\dfrac{t^3-1}{t^3+1}; \end{cases}$$

$t\in\{0;\ 1\} \Leftrightarrow x\in\{1;\ 2\}$.

Відповідь: 1; 2; 3.

VI. УСЕ «МОЖЕ ВИРІШИТИ» ОДЗ

Приклад 38. $\sqrt{x-2}+\sqrt{11-x}+\sqrt{8-2x-x^2}=3.$

$$ОДЗ: \begin{cases} x-2\geqslant 0, \\ 11-x\geqslant 0, \\ 8-2x-x^2\geqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geqslant 2, \\ x\leqslant 11, \\ x\in[-4;\ 2]; \end{cases} \Leftrightarrow x=2.$$

Перевірка: $x=2$ – розв'язок.

Відповідь: 2.

Приклад 39. $(x-4)\sqrt{x+2-x^2}=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=4, \\ x\in ОДЗ; \end{cases} \\ x+2-x^2=0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=4, \\ x\in[-1;\ 2]; \end{cases} \\ x\in\{-1;\ 2\}. \end{array}\right.$$

Відповідь: –1; 2.

VII. **Пам'ятаємо:** $\sqrt{ab}\Big|_{\substack{a \leqslant 0 \\ b \leqslant 0}} = \sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b}$

Приклад 40.

$$2\sqrt{x^2 - 9} = (x + 5)\sqrt{\frac{x + 3}{x - 3}}$$

ОДЗ: $\left[\begin{array}{l} x > 3, \\ x \leqslant -3. \end{array}\right.$

1) При $\underline{x > 3}$ маємо:

$$\sqrt{x^2 - 9} = \sqrt{(x + 3)} \cdot \sqrt{(x - 3)},$$

$$\sqrt{\frac{x + 3}{x - 3}} = \frac{\sqrt{(x + 3)}}{\sqrt{(x - 3)}}.$$

$$2\sqrt{(x - 3)^2(x + 3)} = (x + 5)\sqrt{x + 3},$$

$$2(x - 3) = x + 5,\ x = 11 \in (3;\ \infty).$$

2) При $x \leqslant -3$ маємо:

$$\sqrt{x^2 - 9} = \sqrt{-(x + 3)} \cdot \sqrt{-(x - 3)},$$

$$\sqrt{\frac{x + 3}{x - 3}} = \frac{\sqrt{-(x + 3)}}{\sqrt{-(x - 3)}}.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = -3, \\ \begin{cases} 2(3 - x) = x + 5, \\ x < -3; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow\ x = -3.$$

Відповідь: 11; –3.

VIII. **Пам'ятаємо:** $a = \left[\begin{array}{l} \sqrt{a^2},\ a \geqslant 0, \\ -\sqrt{a^2},\ a < 0. \end{array}\right.$

Приклад 41. $x + 4 - \sqrt{\dfrac{x + 4}{x - 4}} = \dfrac{12}{x - 4},$

ОДЗ: $\dfrac{x+4}{x-4} \geqslant 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leqslant -4, \\ x > 4. \end{array}\right.$

Домножимо рівняння на $(x - 4) \neq 0$. Маємо:

1) Якщо $\underline{x > 4}$, то $(x - 4) = \sqrt{(x-4)^2}$. Тоді

$$\underbrace{x^2 - 16}_{t^2} - \underbrace{\sqrt{x^2 - 16}}_{t > 0} = 12,\ t \in \{4;\ \underset{\uparrow\text{ст. к.}}{-3}\};\ \sqrt{x^2 - 16} = 4,$$

$$\begin{cases} x^2 = 32, \\ x > 4; \end{cases} \Leftrightarrow\ x = 4\sqrt{2}.$$

2) Якщо $\underline{x \leqslant -4}$, то $(x - 4) = -\sqrt{(x-4)^2}$. Тоді

$$\underbrace{x^2 - 16}_{t^2} + \underbrace{\sqrt{x^2 - 16}}_{t > 0} = 12,\ t \in \{-4;\ \underset{\uparrow\text{ст. к.}}{3}\};\ \sqrt{x^2 - 16} = 3,$$

$$\begin{cases} x^2 = 25, \\ x \leqslant -4; \end{cases} \Leftrightarrow\ x = -5.$$

Відповідь: $4\sqrt{2}$; -5.

IX. ШУКАЙТЕ ПОВНИЙ КВАДРАТ

Аналогічно до розв'язування раціональних рівнянь на с. 9.

Приклад 42. $x^2 + 4x + 12 = 2x\sqrt{4x + 12} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x\sqrt{4x + 12} + (4x + 12) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x - \sqrt{4x + 12})^2 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{4x + 12} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0, \\ x^2 = 4x + 12; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0, \\ x \in \{-2;\ 6\}; \end{cases} \Leftrightarrow\ x = 6.$$

Відповідь: 6.

Приклад 43. $\dfrac{x^2 + 30x + 9}{x + 3} = 10\sqrt{x} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x+3)^2 + 24x = 10(x+3)\sqrt{x} \,\Big|\, : x \neq 0$$

$$\underbrace{\left(\frac{x+3}{\sqrt{x}}\right)^2}_{t^2} - 10\underbrace{\frac{x+3}{\sqrt{x}}}_{t} + 24 = 0,\ t \in \{4;\ 6\}.$$

ОДЗ
$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ x + 3 \neq 0 \end{cases}$

$x = 0$ – не є розв'язком.

Відповідь: 1; 9; $15 \pm 6\sqrt{6}$.

Приклад 44.

$$\sqrt{x + 6 + 2\sqrt{x+5}} + \sqrt{x + 9 - 4\sqrt{x+5}} = 4.$$

1) $\underline{\underline{x+6}} + \underline{2\sqrt{x+5}} = (\sqrt{x+5} + 1)^2$

2) $\underline{\underline{x+9}} - \underline{4\sqrt{x+5}} = (\sqrt{x+5} - 2)^2$

3) (44) $\Leftrightarrow \left|\underbrace{\sqrt{x+5}}_{t \geqslant 0} + 1\right| + \left|\underbrace{\sqrt{x+5}}_{t \geqslant 0} - 2\right| = 4;$

$$\begin{cases} t \in \{-1{,}5;\ 2{,}5\} \\ t \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 2{,}5 \Leftrightarrow x = 1{,}25.$$

Відповідь: 1,25.

X. УГАДАВ РОЗВ'ЯЗОК – ДОВЕДИ ЄДИНІСТЬ!

Аналогічно до розв'язування раціональних рівнянь на с. 15.

При доведенні зазвичай спираємося на:

- якщо $f(x)$ строго зростає, а $\varphi(x)$ – спадає, то $f(x) = \varphi(x)$ *має не більше ніж один розв'язок*;
- якщо $f(x)$ строго монотонна, а $\varphi(x) = \text{const}$, то $f(x) = \varphi(x)$ *має не більше ніж один розв'язок*.

Приклад 45. $\underbrace{\sqrt[6]{x+31} + \sqrt[6]{x-33}}_{\textit{зростає}} = \underbrace{2}_{\textit{стала}}.$

Рівняння має не більше ніж один розв'язок.

Перевірка: $x = 33$ – розв'язок.

Відповідь: 33.

Приклад 46.

$$\underbrace{\sqrt[3]{-x}+\sqrt[3]{7-x}+\sqrt[5]{31-x}+\sqrt[7]{127-x}}_{\text{спадає (як сума спадних функцій)}}=\underbrace{7}_{\text{стала}}.$$

Рівняння має не більше ніж один розв'язок.
Перевірка: $x = -1$ – розв'язок.

Відповідь: –1.

Приклад 47. $3x^2+15x+2\sqrt{x^2+5x+1}=2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{(x^2+5x)+1}=2-3\underbrace{(x^2+5x)}_{t}.$

$\underbrace{2\sqrt{t+1}}_{\text{зростає}}=\underbrace{2-3t}_{\text{спадає}}$ – має не більше ніж один розв'язок.

$t=0;\ x^2+5x=0 \Leftrightarrow x\in\{0;\ -5\}.$

Відповідь: 0; –5.

XI. ВЛАСТИВІСТЬ ВЗАЄМНО ОБЕРНЕНИХ ФУНКЦІЙ

Якщо $y=f(x)$ і $y=\varphi(x)$ – взаємно обернені (тобто $x=\varphi(y) \Leftrightarrow y=f(x)$, $f(x)$ і $\varphi(x)$ – монотонні), то $\begin{cases} y=f(x), \\ y=\varphi(x) \end{cases}$ виконується за умови $y=x$.

Приклад 48. $\underbrace{x^2-1}_{f(x)}=\underbrace{\sqrt{x+1}}_{\varphi(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geqslant 1, \\ y=f(x)=x^2-1, \\ y=\varphi(x)=\sqrt{x+1}. \end{cases}$

$f(x)=x^2-1$ і $\varphi(x)=\sqrt{x+1}$ – взаємно обернені при $x\geqslant 1$, бо $x=\sqrt{y+1} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x^2-1, \\ x\geqslant 0. \end{cases}$

Маємо: $\begin{cases} y=x\geqslant 1, \\ y=x^2-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x\geqslant 1, \\ x^2-x-1=0. \end{cases}$

Відповідь: $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

XII. Якщо $f(z) = f(t)$ і $y = f(x)$ – монотонна, то $z = t$

Приклад 49.

$$(2x+1)(2+\sqrt{(2x+1)^2+3}) = -3x(2+\sqrt{9x^2+3}).$$

$f(t) \triangleq t(2+\sqrt{t^2+3})$ – зростає, тоді $2x+1 = -3x$.

Відповідь: $-0{,}2$.

XIII. **Якщо дано суму (різницю) двох коренів**

Позначимо їх як t і z.

$$\underbrace{\sqrt[n]{\pm x^k + a}}_{t} \pm \underbrace{\sqrt[m]{\pm x^p + b}}_{z} = c$$

- У випадках $\underbrace{\sqrt[n]{x+a} + \sqrt[m]{x+b}}_{\text{зростає}} = c$; $\underbrace{\sqrt[n]{a-x} + \sqrt[m]{b-x}}_{\text{спадає}} = c$ див. п.X (с. 22).

- У випадку $\sqrt{x^2+a} - \sqrt{x^2+b} = c$

$$t = \sqrt{x^2+a}, \quad z = \sqrt{x^2+b}$$

$$\begin{cases} t - z = c, \\ t^2 - z^2 = a - b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t - z = c, \\ t + z = \dfrac{a-b}{c}. \end{cases}$$

Приклад 50. $\underbrace{\sqrt[4]{x+8}}_{t \geqslant 0} - \underbrace{\sqrt[4]{x-8}}_{z \geqslant 0} = 2.$

$$\begin{cases} t - z = 2, \\ t^4 - z^4 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t - z = 2, \\ 2 \cdot (t+z)(t^2+z^2) = 16 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t - z = 2, \\ (t+z)(\underbrace{(t-z)^2}_{2^2} + 2tz) = 8 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t - z = 2, \\ (t + z)(2 + tz) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 + z, \\ z^3 + 3z^2 + 4z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 0, \\ t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 8.$$

Відповідь: 8.

Вузлик на згадку

$$t^2 + z^2 = (t + z)^2 - 2tz$$
$$t^2 + z^2 = (t - z)^2 + 2tz$$
$$t^4 - z^4 = (t - z)(t + z)(t^2 + z^2)$$
$$t^4 + z^4 = (t^2 + z^2)^2 - 2t^2z^2$$

Приклад 51. $\underbrace{\sqrt[3]{2 - x}}_{t} + \underbrace{\sqrt{x - 1}}_{z \geqslant 0} = 1.$

$$\begin{cases} t + z = 1, \\ t^3 + z^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 - t, \\ t^3 + t^2 - 2t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 - t, \\ \left[\begin{array}{l} t = 0, \\ t^2 + t - 2 = 0. \end{array}\right. \end{cases}$$

Відповідь: 2; 10.

XIV. ІНОДІ ДОЦІЛЬНО ДОМНОЖИТИ НА СПРЯЖЕНИЙ ВИРАЗ

Вузлик на згадку

$$(\underline{\sqrt{a} + \sqrt{b}})(\underline{\sqrt{a} - \sqrt{b}}) = a - b$$

спряжені

Приклад 52. $(\sqrt{1 + x} + 1)(\sqrt{1 + x} + 2x - 1) = x.$

Різниця квадратів доданків першої дужки дорівнює x, тому доцільно домножити рівняння на спряжений до цієї дужки вираз $(\sqrt{1 + x} - 1)$ за умови $\sqrt{1 + x} - 1 \neq 0$.

1) $\underline{\sqrt{1+x}-1=0} \Leftrightarrow x=0$ – розв'язок.

2) $\underline{\sqrt{1+x}-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 0}$. Маємо:

$x\cdot(\sqrt{1+x}+2x-1)=x\cdot(\sqrt{1+x}-1)$,

$\sqrt{1+x}+2x-1=\sqrt{1+x}-1 \Leftrightarrow x=0$ – ст. к.

Відповідь: 0.

Приклад 53.

$$\sqrt{\underline{7}x^2+8x+\underline{\underline{10}}}-\sqrt{\underline{7}x^2-8x+\underline{\underline{10}}}=2x.$$

Обидва підкореневі тричлени мають однакові перший і третій коефіцієнти (домножимо на спряжений, відмінний від нуля):

$$16x=2x\left(\sqrt{\underline{7}x^2+8x+\underline{\underline{10}}}+\sqrt{\underline{7}x^2-8x+\underline{\underline{10}}}\right)$$

1) $\underline{x=0}$ – розв'язок.

2) При $\underline{x\neq 0}$ маємо:

$$\begin{cases}\sqrt{7x^2+8x+10}+\sqrt{7x^2-8x+10}=8\\ \sqrt{7x^2+8x+10}-\sqrt{7x^2-8x+10}=2x\end{cases}\Bigg|+\Bigg| \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x^2=1.$

Відповідь: –1; 0; 1.

Приклад 54.

$$\sqrt{\underline{x}^3-\underline{\underline{2}}x^2+x+2}-\sqrt{\underline{x}^3-\underline{\underline{2}}x^2-x+3}=2x-1.$$

Обидва підкореневі вирази мають однакові коефіцієнти при x^3 і x^2. Домножимо обидві частини на спряжений до лівої частини вираз, відмінний від нуля:

$2x-1=$

$=(2x-1)(\sqrt{x^3-2x^2+x+2}+\sqrt{x^3-2x^2-x-3}).$

1) Перевірка: $x=0{,}5$ – розв'язок.

2) При $\underline{x \neq 0{,}5}$ ділимо на $2x - 1 \neq 0$. Далі аналогічно до приклада 52 маємо:

$$\sqrt{x^3 - 2x^2 + x + 2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 2x^2 + x + 2 = 0, \\ x \geqslant 0,\ x \neq 0{,}5 \end{cases}$$

і див. с. 5–6.

Відповідь: $0{,}5;\ 2;\ \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Приклад 55. $\sqrt{3x^2 - 7x + 3} - \sqrt{x^2 - 2} =$

$= \sqrt{3x^2 - 5x - 1} - \sqrt{x^2 - 3x + 4} \Leftrightarrow \sqrt{3x^2 - 7x + 3} -$

$-\sqrt{3x^2 - 5x - 1} = \sqrt{x^2 - 2} - \sqrt{x^2 - 3x + 4}.$

Множимо й ділимо ліву й праву частини рівності на спряжені їм вирази, відмінні від нуля:

$$\frac{-2(x-2)}{\sqrt{3x^2 - 7x + 3} + \sqrt{3x^2 - 5x - 1}} =$$

$$= \frac{3(x-2)}{\sqrt{x^2 - 2} + \sqrt{x^2 - 3x + 4}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 2 = 0, \\ \underbrace{\dfrac{-2}{\sqrt{3x^2 - 7x + 3} + \sqrt{3x^2 - 5x - 1}}}_{<0} = \end{array}\right.$$

$$= \underbrace{\frac{3}{\sqrt{x^2 - 2} + \sqrt{x^2 - 3x + 4}}}_{>0} \Leftrightarrow x = 2.$$

Відповідь: 2.

XV. $\boxed{\sqrt{ax + b} \pm \sqrt{cx + d} = \sqrt{nx + m} \pm \sqrt{kx + l}, \text{ якщо } a + c = n + k}$

Підносимо обидві частини до квадрата (за умови невід'ємності правої та лівої частин рівняння).

Приклад 56.

$$\sqrt{8x+1}+\sqrt{3x-5}=\sqrt{7x+4}+\sqrt{2x-2}.$$

ОДЗ: $x \geqslant \frac{5}{3}$. Тоді

$$\underbrace{\sqrt{8x+1}-\sqrt{2x-2}}_{>0}=\underbrace{\sqrt{7x+4}-\sqrt{3x-5}}_{>0}.$$

Піднесемо обидві частини до квадрата:

$$\begin{cases} x \geqslant \frac{5}{3}, \\ \underbrace{\sqrt{(8x+1)(2x-2)}}_{>0}=\underbrace{\sqrt{(7x+4)(3x-5)}}_{\geqslant 0}. \end{cases}$$

Знову піднесемо обидві частини до квадрата:

$$\begin{cases} x \geqslant \frac{5}{3}, \\ (8x+1)(2x-2)=(7x+4)(3x-5) \end{cases} \Leftrightarrow \quad x=3.$$

Відповідь: 3.

XVI. ТРИ КУБІЧНИХ КОРЕНІ

- Або уважно підносимо до куба.
- Або використовуємо заміну.
- Або спираємося на монотонність.

Приклад 57. $\sqrt[3]{x+5}+\sqrt[3]{x+6}=\sqrt[3]{2x+11}$.

Підносимо до куба, враховуючи що $(a \pm b)^3 = a^3 \pm b^3 \pm 3ab(a+b)$:

$$\cancel{2x+11}+3(x+5)^{\frac{1}{3}}(x+6)^{\frac{1}{3}}\underbrace{\left((x+5)^{\frac{1}{3}}+(x+6)^{\frac{1}{3}}\right)}_{\sqrt[3]{2x+11}}=$$

$$=\cancel{2x+11} \Leftrightarrow \sqrt[3]{(x+5)(x+6)(2x+11)}=0.$$

Відповідь: -5; -6; $-5,5$.

Приклад 58.

$$\sqrt[3]{(x-2)^2}+\sqrt[3]{(x-3)^2}=\frac{5}{2}\sqrt[3]{(x-2)(x-3)};$$

$\sqrt[3]{x-2}\triangleq t;\ \sqrt[3]{x-3}\triangleq z,\ tz\neq 0,$

$$\begin{cases} t^2+z^2=\frac{5}{2}tz, \\ t^3-z^3=1 \end{cases}\left|\ :tz\ \right| \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{t}{z}+\frac{z}{t}=2+\frac{1}{2}, \\ t^3-z^3=1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t\in\{2z;\ 0{,}5z\} \\ t^3-z^3=1. \end{cases}$$ (див. «Вузлик» на с. 18).

Відповідь: $3\frac{1}{7};\ 1\frac{6}{7}$.

Приклад 59. $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{x+3}=0.$

$\underbrace{\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x+2}}_{\text{зростає}}=-\underbrace{\sqrt[3]{x+3}}_{\text{спадає}}$, тому рівняння має єдиний розв'язок $x=-2$ (див. X, с. 22–23).

Відповідь: -2.

XVII. ПОХІДНІ ПРОПОРЦІЇ

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\left|\begin{array}{l}\nearrow +1\\ \searrow -1\end{array}\right| \Leftrightarrow \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d} \Leftrightarrow \frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$$
$$\Leftrightarrow \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$$

Приклад 60.

$$\frac{\sqrt{x^2-x-2}+x}{\underbrace{\sqrt{x^2-x-2}}_{a}-\underbrace{x}_{b}}=-5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x^2-x-2}}{x}=\frac{-2}{-3} \Leftrightarrow$$

Аналіз: $-5=\frac{c+d}{c-d}$

$$\begin{cases} c+d=-5 \\ c-d=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=-2 \\ d=-3 \end{cases}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{x^2-x-2}}{x};\ \frac{c}{d}=\frac{-2}{-3}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2 = \frac{4}{9}x^2, \\ x > 0. \end{cases}$$

Відповідь: 3.

РАЦІОНАЛЬНІ СИСТЕМИ ДВОХ РІВНЯНЬ З ДВОМА ЗМІННИМИ

I. Лінійні $\boxed{\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}}$

- Якщо $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ – безліч розв'язків вигляду $\left(x;\ y = \frac{c_2 - a_2x}{b_2}\right)$, де $x \in R$.
- Якщо $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ – немає розв'язків: $\{x;\ y\} \subset \varnothing$.
- Якщо $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ – єдиний розв'язок (шукаємо алгебраїчним додаванням рівнянь або підстановкою).

Приклад 61.

$$\begin{cases} 3x - 4y = 1, \\ 6x - 8y = -3. \end{cases}$$

$\frac{3}{6} = \frac{-4}{-8} \neq \frac{1}{-3}$.

Відповідь: $\varnothing$.

Приклад 62.

$$\begin{cases} 3x - 5y = 1, \\ 2x + 7y = 20. \end{cases}$$

$\frac{3}{2} \neq \frac{-5}{7}$, тобто 1 розв'язок

$$\begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ 2x + 7y = -20 \end{cases} \begin{matrix} \cdot 2 \\ \cdot 3 \end{matrix} - \Leftrightarrow \begin{cases} -31y = 62 \\ 2x + 7y = -20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2 \\ x = -3. \end{cases}$$

Відповідь: (–3; –2).

II. ДОПОМОЖЕ ТЕОРЕМА, ОБЕРНЕНА ДО ТЕОРЕМИ ВІЄТА

IIа.

$$\begin{cases} x + y = m \\ xy = n \end{cases}$$

x і y – розв'язки рівняння $t^2 - mt + n = 0$

IIб.

$$\begin{cases} x - y = m \\ x \cdot y = n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + (-y) = m \\ x \cdot (-y) = -n \end{cases}$$

x і $(-y)$ – розв'язки рівняння $t^2 - mt - n = 0$

IIв.

$$\begin{cases} ax + by = m \\ xy = n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax + by = m \\ (ax) \cdot (by) = n \cdot ab \end{cases}$$

(ax) і (by) – розв'язки рівняння $t^2 - mt + abn = 0$

Приклад 63. $\begin{cases} 3x - 2y = 22, \\ xy = -20; \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + (-2y) = 22, \\ (3x) \cdot (-2y) = 120; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$t^2 - 22t + 120 = 0$

$$\left[\begin{array}{l} t = 10 \\ t = 12 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3x = 10, \\ -2y = 12, \end{cases} \\ \begin{cases} 3x = 12, \\ -2y = 10. \end{cases} \end{array}\right.$$

Відповідь: $\left(\frac{10}{3}; -6\right)$; $(4; -5)$.

IIг.

$$\begin{cases} x^2 \pm y^2 = m \\ xy = n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (\pm y^2) = m \\ (x^2)\cdot(\pm y^2) = -n^2 \\ \operatorname{sign}(xy) = \operatorname{sign}(n) \end{cases}$$

(x^2) і $(\pm y^2)$ є розв'язками рівняння $t^2 - mt \pm n^2 = 0$, якщо виконується умова $\operatorname{sign}(xy) = \operatorname{sign}(n)$.

Приклад 64.

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3, \\ xy = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (-y^2) = 3, \\ x^2 \cdot (-y^2) = -4, \\ \operatorname{sign}(xy) = \operatorname{sign}(-2). \end{cases}$$

Враховуючи, що рівність $-y^2 = 1$ не має змісту,

маємо: $\begin{cases} x^2 = 1, \\ -y^2 = -4, \\ xy < 0. \end{cases}$

Відповідь: (1; –2), (–1; 2).

IIд.

$$\begin{cases} ax^n \pm by^n = m \\ xy = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax^n + (\pm by^n) = m \\ (ax^n)\cdot(\pm by^n) = \pm abc^n \\ \operatorname{sign}(xy) = \operatorname{sign} c \end{cases}$$

Приклад 65. $\begin{cases} x^4 + y^4 = 17, \\ xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 + y^4 = 17, \\ x^4y^4 = 16, \\ xy > 0. \end{cases}$

Маємо: $x^4 = 16$ і $y^4 = 1$ або $y^4 = 16$ і $x^4 = 1$ (за умови $xy > 0$).

Відповідь: (–1; –2), (–2; –1), (1; 2), (2; 1).

III.

$$\begin{cases} F(x,y) = a \\ f_1(x,y) \cdot f_2(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \{x,y\} \subset ОДЗ \\ F(x,y) = a \\ f_1(x,y) = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \{x,y\} \subset ОДЗ \\ F(x,y) = a \\ f_2(x,y) = 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

Приклад 66. $\begin{cases} 3x^2 - 3xy + 2y^2 - x + 4y = 21, \\ xy - 2x - 3y + 6 = 0. \end{cases}$

$$xy - 2x - 3y + 6 = (x-3)(y-2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3, \\ y = 2. \end{array} \right.$$

Якщо $x = 3$, то $\left[\begin{array}{l} y = 1, \\ y = \dfrac{3}{2}. \end{array} \right.$

Якщо $y = 2$, то $x = \dfrac{7 \pm \sqrt{109}}{6}$.

Відповідь: $(3;\ 1)$; $\left(3;\ \dfrac{3}{2}\right)$; $\left(\dfrac{7 \pm \sqrt{109}}{6};\ 2\right)$.

Приклад 67. $\begin{cases} x - y + \sqrt{x^2 - 4y^2} = 2, \\ x^2 \cdot \sqrt{x^2 - 4y^2} = 0. \end{cases}$

ОДЗ: $x^2 - 4y^2 \geqslant 0$.

1) $x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -y + \sqrt{-4y^2} = 2 \\ -4y^2 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \{x;\ y\} \subset \varnothing$

2) $x^2 - 4y^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 2, \\ x^2 - 4y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + y, \\ y \in \left\{2;\ -\dfrac{2}{3}\right\}. \end{cases}$

Відповідь: (4; 2); $\left(\dfrac{4}{3};\ -\dfrac{2}{3}\right)$.

IV. АЛГЕБРАЇЧНЕ ДОДАВАННЯ

Приклад 68.

$$\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 - 3x + y = 4, \\ 3x^2 + 4{,}5y^2 - 4x + 2y = 6{,}5 \end{cases} \left| \begin{matrix} \cdot 3 \\ \cdot 2 \end{matrix} \right. - \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - x, \\ x^2 - 2x = 0. \end{cases}$$

Відповідь: (0; 1), (2; –1).

V. СИМЕТРИЧНІ

$x \rightleftarrows y$ не змінює систему

Розв'язуємо заміною:	При тому пам'ятаємо:
$\begin{cases} x + y \triangleq t \\ xy \triangleq z \end{cases}$	$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$ $x^3 + y^3 = (x + y)((x + y)^2 - 3xy)$ $x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2$

Приклад 69. $\begin{cases} x^4 + y^4 - 2xy = 21, \\ x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ((x + y)^2 - 2xy)^2 - 2x^2y^2 - 2\underbrace{xy}_{=z} = 21, \\ \underbrace{x + y}_{=t} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 3, \\ (9 - 2z)^2 - 2z^2 - 2z = 21. \end{cases}$$

Відповідь: (1; 2), (2; 1).

Вузлик на згадку

У симетричній системі якщо $(a;\ b)$ – розв'язок, то і $(b;\ a)$ – розв'язок.

Приклад 70. $\begin{cases}(x+y)^2-3xy+2x+2y=-3,\\ 3xy-(x+y)=9.\end{cases}$

Маємо: $\begin{cases}t^2-3z+2t=-3,\\ 3z-t=9.\end{cases}$

Відповідь: $(-1;\ -2)$, $(-2;\ -1)$.

VI. ОДНЕ З РІВНЯНЬ Є ОДНОРІДНИМ

В одній частині рівняння однорідний многочлен (усі доданки ax^my^p мають $m+p=n$, де $n=\text{const}$ – степінь однорідності), в іншій – нуль.

Ділимо це рівняння на y^n (n – степінь однорідності), переконавшись, що $y=0$ не є розв'язком системи.

Приклад 71.

$$\begin{cases}2x^2-3xy+y^2=3,\\ 3x^2-8xy+4y^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2-3xy+y^2=3,\\ 3\left(\dfrac{x}{y}\right)^2-8\left(\dfrac{x}{y}\right)+4=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2-3xy+y^2=3,\\ \left(\dfrac{x}{y}\right)\in\left\{2;\ \dfrac{2}{3}\right\}\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=2y,\\ y^2=1;\end{cases}\\ \begin{cases}x=\dfrac{2}{3}y,\\ -\dfrac{1}{9}y^2=3.\end{cases}\end{array}\right.$$

Відповідь: $(-2;\ -1)$, $(2;\ 1)$.

VII. ЛІВІ ЧАСТИНИ ОБОХ РІВНЯНЬ – ОДНОРІДНІ МНОГОЧЛЕНИ ОДНОГО СТЕПЕНЯ, А ПРАВІ – ВІДМІННІ ВІД НУЛЯ ЧИСЛА

- Зводимо до типу VI.
- Можна ввести заміну і поділити одне з рівнянь на інше (за умови, що дільник не нуль).

Приклад 72. $\begin{cases} 2x^2 - 3xy + y^2 = 3, \\ x^2 + 2xy - 2y^2 = 6. \end{cases}$

1-й спосіб.

$$\begin{cases} 2x^2 - 3xy + y^2 = 3 \\ x^2 + 2xy - 2y^2 = 6 \end{cases} \left| \begin{matrix} \cdot 2 \\ - \end{matrix} \right| \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 8xy + 4y^2 = 0 \\ 2x^2 - 3xy + y^2 = 3. \end{cases}$$

Далі див. п. VI на с. 33.

2-й спосіб. $x \triangleq ty$

$$\begin{cases} y^2(2t^2 - 3t + 1) = 3 \\ y^2(t^2 + 2t - 2) = 6 \end{cases} \Bigg| : \Bigg| \quad \text{Тоді } \frac{t^2 - 2t - 2}{2t^2 - 3t + 1} = 2,$$

$t \in \left\{\frac{2}{3};\ 2\right\}$. При $t = 2$ маємо: $|y| = 1$; при $t = \frac{2}{3}$ р. н.

Відповідь: (2; 1), (–2; –1).

РАЦІОНАЛЬНІ СИСТЕМИ ТРЬОХ РІВНЯНЬ З ТРЬОМА ЗМІННИМИ

I. ТЕОРЕМА, ОБЕРНЕНА ДО ТЕОРЕМИ ВІЄТА:

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ xy + xz + yz = b \\ xyz = c \end{cases}$$

x, y, z – корені рівняння $-t^3 + at^2 - bt + c = 0$.

Приклад 73.

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ xy + xz + yz = -1 \\ xyz = -2 \end{cases}$$

$-t^3 + 2t^2 + t - 2 = 0$
$-t^2(t - 2) + t - 2 = 0$
$(t - 2)(t^2 - 1) = 0$
$t \in \{2; \pm 1\}$.

Відповідь: (2; 1; –1), (2; –1: 1), (1; 2; –1), (1; –1; 2), (–1; 1; 2), (–1; 2; 1).

II. КРУГОВІ СИСТЕМИ

IIа. $\begin{cases} x + y = a \\ x + z = b \\ y + z = c \end{cases} \left| + \right| \Leftrightarrow x + y + z = \dfrac{a + b + c}{2}.$

Далі по черзі від цієї рівності віднімаємо кожне з рівнянь системи.

IIб. $\begin{cases} xy = a \\ xz = b \\ yz = c \end{cases} \left| \cdot \right| \Leftrightarrow x^2y^2z^2 = abc.$

Далі по черзі ділимо на кожне з рівнянь системи, піднесене до квадрата; враховуємо знаки коефіцієнтів a, b, c.

Приклад 74.

$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + z = 2 \\ y + z = 3 \end{cases} \left| + \right|$ Маємо: $x + y + z = 3,$
$z = 3 - 1 = 2;$
$y = 3 - 2 = 1;$
$x = 3 - 3 = 0.$

Відповідь: (0; 1; 2).

Приклад 75.

$\begin{cases} x^2 = 10y - 49 \\ y^2 = 7 - 6z \\ z^2 = 7 + 2x \end{cases} \left| + \right|$

Маємо:

$(x - 1)^2 - 1 + (y - 5)^2 - 25 + (z + 3)^2 - 9 = -35 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underbrace{(x - 1)^2}_{\geqslant 0} + \underbrace{(y - 5)^2}_{\geqslant 0} + \underbrace{(z + 3)^2}_{\geqslant 0} = 0.$

Відповідь: (1; 5; –3).

Приклад 76.

$$\begin{cases} xy = -1 \\ yz = -4 \\ xz = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \quad x^2 \cdot y^2 \cdot z^2 = 4 \cdot 9.$$

$z^2 = x^2y^2z^2 : x^2y^2 = 4 \cdot 9 : 1 \Leftrightarrow |z| = 6;$

$x^2 = x^2y^2z^2 : y^2z^2 = 4 \cdot 9 : 4^2 \Leftrightarrow |x| = \frac{3}{2};$

$y^2 = x^2y^2z^2 : x^2z^2 = 4 \cdot 9 : 9^2 \Leftrightarrow |y| = \frac{2}{3}.$

1) $x = \frac{3}{2} > 0$, тоді $z > 0$, $y < 0$;

2) $x = -\frac{3}{2} < 0$, тоді $z < 0$, $y > 0$.

Відповідь: $\left(\frac{3}{2}; -\frac{2}{3}; 6\right), \left(-\frac{3}{2}; \frac{2}{3}; -6\right).$

Приклад 77.

$$\begin{cases} xy + yz = 18 \\ yz + xz = 20 \\ xz + xy = 14 \end{cases} +$$

Маємо: $xy + yz + xz = 26$ і по черзі від нього віднімаємо кожне з рівнянь системи:

$$\begin{cases} xz = 8 \\ xy = 6 \\ yz = 12 \end{cases} \cdot$$

Одержимо: $x^2y^2z^2 = 8 \cdot 6 \cdot 12.$

По черзі ділимо на x^2z^2, x^2y^2, y^2z^2; врахуємо, що x, y, z мають однакові знаки.

Відповідь: (2; 3; 4), (–2; –3; –4).

ДРОБОВО-РАЦІОНАЛЬНІ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ

I. НЕ ЗАБУДЬТЕ ВРАХУВАТИ ОДЗ

Приклад 78.

$$\begin{cases} \dfrac{x^2 - 2xy + y^2}{xy} = \dfrac{1}{6} \\ x^2 + xy + y^2 = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0;\ \ y \neq 0 \\ 6x^2 - 13xy + 6y^2 = 0 \\ x^2 + xy + y^2 = 19 \end{cases}$$

далі див. п. VI на с. 33.

Відповідь: (2; 3), (–2; –3), (3; 2), (–3; –2).

II. ШУКАЙТЕ ЗАМІНУ

Приклад 79.

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x+y} + x = -1 \\ \dfrac{x}{x+y} = -2 \end{cases} \left| \ \dfrac{1}{x+y} \triangleq t \ \right|$$

Маємо: $\begin{cases} t + x = -1 \\ tx = -2 \end{cases}$

$\{t;\ x\} \subset \{-2;\ 1\}$.

1) $\begin{cases} x = -2 \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 3. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = 1 \\ x + y = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -\dfrac{3}{2}. \end{cases}$

Відповідь: $(-2;\ 3);\ \left(1;\ -\dfrac{3}{2}\right)$.

Приклад 80.

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2x-3y} + \dfrac{2}{3x-2y} = \dfrac{3}{4} \\ \dfrac{3}{2x-3y} - \dfrac{4}{3x-2y} = 1 \end{cases} \left| \ \begin{matrix} \dfrac{1}{2x-3y} \triangleq t \\ \dfrac{1}{3x-2y} \triangleq z \end{matrix} \ \right| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t + 2z = \dfrac{3}{4} \\ 3t - 4z = 1 \end{cases} \begin{vmatrix} \cdot 2 \\ + \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{1}{2} \\ z = \dfrac{1}{8} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 2 \\ 3x - 2y = 8 \end{cases} \begin{vmatrix} \cdot 3 \\ \cdot 2 \\ - \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 2. \end{cases}$$

Відповідь: (4; 2).

III. ІНКОЛИ ДОЦІЛЬНО ПОДІЛИТИ

Приклад 81.

$$\begin{cases} (x + y)^2(x + 2y) = 120 \\ (x + y)(y + 2x) = \dfrac{60}{y - x} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (y + x)(y - x)(y + 2x) = 60 \\ x(5x + y) = 0 \\ y \neq \pm x. \end{cases}$$

Ділимо перше рівняння на друге, скорочуємо ($x + y \neq 0$), маємо: $5x^2 + xy = 0$ за умови $y \neq \pm x$

Відповідь: $(0;\ \sqrt[3]{60})$, $\left(\sqrt[3]{\dfrac{5}{6}};\ -5\sqrt[3]{\dfrac{5}{6}}\right)$.

ІРРАЦІОНАЛЬНІ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ

I. ПРОАНАЛІЗУЙТЕ ОДЗ

Приклад 82.

$$\begin{cases} \sqrt{2xy - x^2 - y^2} = 3x^5 - 13y^3, \\ \dfrac{x^2 - 2xy + 18}{xy} = 16. \end{cases}$$

ОДЗ:

$$\begin{cases} -(x - y)^2 \geqslant 0 \\ xy \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = y \neq 0$$

При $x = y \neq 0$ маємо: $\begin{cases} x^3(3x^2 - 13) = 0 \\ 17x^2 = 18 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \varnothing.$

Відповідь: $\varnothing$.

Приклад 83. $\begin{cases} \sqrt{6+x-x^2} + 2y + 3z = 2, \\ \sqrt{x-3} + 3y + 2z = -7. \end{cases}$

ОДЗ: $\begin{cases} 6+x-x^2 \geqslant 0 \\ x-3 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-2;\ 3] \\ x \geqslant 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$

При $x = 3$ маємо:

$$\begin{cases} 2y + 3z = 2 \\ 3y + 2z = -7 \end{cases} \left| \begin{matrix} \cdot 2 \\ \cdot 3 \end{matrix} \right| - \Leftrightarrow \begin{cases} y = -5 \\ z = 4. \end{cases}$$

Відповідь: (3; –5; 4).

II. ШУКАЙТЕ ЗАМІНУ

Приклад 84.

$$\begin{cases} \underbrace{\sqrt[3]{x+y+4}}_{t} + \underbrace{\sqrt[3]{y+7}}_{z} = 4 \\ x + 2y = 5. \end{cases} \qquad t^3 + z^3 = \underbrace{x+2y}_{5} + 11$$

$$\begin{cases} t + z = 4 \\ t^3 + z^3 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t + z = 4 \\ 4(t^2 - tz + z^2) = 16 \end{cases} \Leftrightarrow$$

(враховуючи, що $t^2 - tz + z^2 = (t+z)^2 - 3tz$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t + z = 4 \\ tz = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ z = 2 \end{cases}$$ (див. IIа на с. 30)

Маємо: $\begin{cases} x + y + 4 = 2^3 \\ y + 7 = 2^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$

Відповідь: (3; 1).

Приклад 85.

$$\begin{cases} 3\sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{2xy} = \sqrt{8} \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 2. \end{cases} \qquad \text{ОДЗ: } \begin{cases} x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underbrace{3\sqrt{x^2+y^2}}_{\geqslant 0} = \underbrace{\sqrt{8}+\sqrt{2xy}}_{>0} \\ \underbrace{\sqrt{x}+\sqrt{y}}_{\geqslant 0} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9(x^2+y^2) = 8 + 2\sqrt{16xy} + 2xy \\ x + y + 2\sqrt{xy} = 4. \end{cases}$$

Нехай $\sqrt{xy} \triangleq t$, $x + y \triangleq z$, маємо:

$x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = z^2 - 2t^2$.

$$\begin{cases} 9z^2 - 20t^2 - 8t - 8 = 0 \\ z + 2t = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} z = 2 \\ t = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} z = -13 \\ t = \dfrac{17}{2}. \end{cases} \end{array}\right.$$

1) $\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + y = -13 \\ xy = \dfrac{289}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 0 \\ y < 0. \end{cases}$

Відповідь: (1; 1).

III.

Пам'ятаємо: $a \cdot b \geqslant 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \geqslant 0 \\ b \geqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a \leqslant 0 \\ b \leqslant 0 \end{cases} \end{array}\right.$

- $\sqrt{ab}\Big|_{\substack{a \leqslant 0 \\ b \leqslant 0}} = \sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b}$;
- $a\Big|_{a \leqslant 0} = -\sqrt{a^2} = -\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-a} = -(\sqrt{-a})^2$.

Приклад 86.

$$\begin{cases} x^2 - y\sqrt{xy} = 36, \\ y^2 - x\sqrt{xy} = 72. \end{cases}$$

ОДЗ: $xy > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \end{cases} \end{array}\right.$

1) Якщо $\underline{\begin{cases} x > 0 \\ y > 0, \end{cases}}$ то $\begin{cases} x = \left(\sqrt{x}\right)^2 \\ y = \left(\sqrt{y}\right)^2. \end{cases}$ Маємо:

$$\begin{cases} \sqrt{x}\left(\left(\sqrt{x}\right)^3 - \left(\sqrt{y}\right)^3\right) = 36, \\ \sqrt{y}\left(\left(\sqrt{y}\right)^3 - \left(\sqrt{x}\right)^3\right) = 72; \end{cases} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = -2, \text{ р. н.}$$

2) Якщо $\underline{\begin{cases} x < 0 \\ y < 0, \end{cases}}$ то $\begin{cases} x = -\left(\sqrt{-x}\right)^2 \\ y = -\left(\sqrt{-y}\right)^2. \end{cases}$

Маємо: $\begin{cases} \sqrt{-x}\left(\left(\sqrt{-x}\right)^3 + \left(\sqrt{-y}\right)^3\right) = 36, \\ \sqrt{-y}\left(\left(\sqrt{-y}\right)^3 + \left(\sqrt{-x}\right)^3\right) = 72; \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{-y}}{\sqrt{-x}} = 2, \ \left(\sqrt{-x}\right)^4 = 4.$$

Відповідь: (–2; –8).

Приклад 87.

$$\begin{cases} x^2 + y\sqrt[3]{x^2y} = 68, \\ y^2 + x\sqrt[3]{y^2x} = 17; \end{cases}$$

Зауважимо, що обидва рівняння є однорідними 2-го степеня.

Заміна $x \triangleq ty$. Тоді:

$$\begin{cases} y^2t^2 + y\sqrt[3]{y^3t^2} = 68 \\ y^2 + yt\sqrt[3]{y^3t} = 17 \end{cases} \Bigg| : \Bigg|$$

Маємо: $\sqrt[3]{t^2} = 4$, $t^2 = 64$, $|t| = 8$.

$$1)\ \begin{cases} \dfrac{x}{y} = 8 \\ y^2 + x\sqrt[3]{y^2x} = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 8 \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -8 \\ y = -1. \end{cases} \end{array}\right.$$

$$2)\ \begin{cases} \dfrac{x}{y} = -8 \\ y^2 + x\sqrt[3]{y^2x} = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 8 \\ y = -1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -8 \\ y = 1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Відповідь: (8; 1), (–8; –1), (8; –1), (–8; 1).

Приклад 88.

$$\begin{cases} x - y + \sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}} = \dfrac{12}{x+y}, \\ x^2 + y^2 = 41. \end{cases}$$

ОДЗ: $\dfrac{x-y}{x+y} \geqslant 0$

Перетворимо перше рівняння:

$$x^2 - y^2 + (x+y)\sqrt{\frac{x-y}{x+y}} = 12.$$

1) $\underline{x - y \geqslant 0 \text{ і } x + y > 0}$. Тоді маємо:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + \underbrace{\sqrt{x^2 - y^2}}_{t \geqslant 0} = 12 \\ x^2 + y^2 = 41 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$t^2 + t - 12 = 0$

$\left[\begin{array}{l} t = -4 \text{ – ст. к.} \\ t = 3 > 0 \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 9 \\ x^2 + y^2 = 41 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| = 5 \\ |y| = 4 \end{cases}$$

Отже, $(x; y) \subset \{(5;\ 4),\ (5;\ -4)\}$.

2) $\underline{x - y \leqslant 0 \text{ і } x + y < 0}$. Тоді маємо:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - \underbrace{\sqrt{x^2 - y^2}}_{z \geqslant 0} = 12 \\ x^2 + y^2 = 41 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$z^2 - z - 12 = 0$

$\left[\begin{array}{l} z = 4 > 0 \\ z = -3 \text{ – ст. к.} \end{array}\right.$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 16 \\ x^2 + y^2 = 41 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| = \sqrt{28,5} \\ |y| = \sqrt{12,5} \end{cases}$$

Отже,

$(x; y) \subset \{(-\sqrt{28,5};\ \sqrt{12,5}),\ (-\sqrt{28,5};\ -\sqrt{12,5})\}$.

Відповідь: (5; 4), (5; –4), $(-\sqrt{28,5};\ \sqrt{12,5})$, $(-\sqrt{28,5};\ -\sqrt{12,5})$.

IV. **Враховуємо властивість монотонної функції:** $f(z) = f(t) \Leftrightarrow z = t$, якщо $f(x)$ – строго монотонна (див. с. 15).

Приклад 89.

$$\begin{cases} x + \sqrt[6]{x} = y + \sqrt[6]{y} \\ x^2 + xy + y^2 = 27 \end{cases} \Leftrightarrow$$

функція $f(t) = t + \sqrt[6]{t}$ – строго монотонна, тоді $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 3x^2 = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ |x| = 3. \end{cases}$$

Відповідь: (3; 3), (–3; –3).

V. **Угадав розв'язки – доведи, що інших немає.**

Приклад 90. $\begin{cases} \sqrt{(x^2+1)(y^2+1)} = \sqrt{10}, \\ (x+y)(xy-1) = 3. \end{cases}$

Перше рівняння рівносильне рівнянню $(x^2 + 1)\cdot(y^2 + 1) = 10$, але $10 = 2\cdot 5$.

	Спробуємо:	Маємо:
1)	$\begin{cases} x^2 + 1 = 2 \\ y^2 + 1 = 5 \end{cases}$	$\begin{cases} \lvert x\rvert = 1 \\ \lvert y\rvert = 2 \\ (x+y)(xy-1) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1 \\ y = -2. \end{cases} \end{array}\right.$

2) $\begin{cases} x^2+1=5 \\ y^2+1=2 \end{cases}$	$\begin{cases} \lvert x\rvert = 2 \\ \lvert y\rvert = 1 \\ (x+y)(xy-1)=3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-2 \\ y=1. \end{cases} \end{array}\right.$	

Задана умовою система зводиться до рівняння четвертого степеня і не може мати більше ніж чотири розв'язки.

Відповідь: (1; 2), (1; –2), (2; 1), (–2; 1).

СЛОВНИЧОК ПОЗНАЧЕНЬ І СКОРОЧЕНЬ

ОДЗ – область допустимих значень, область визначення виразу.

sign a – знак a.

min $\{a; b\}$ – *найменше* із чисел a, b.

max $\{a; b\}$ – *найбільше* із чисел a, b.

$\{a, b, c, \ldots\}$ – множина з елементів a, b, c, ...

$\in$ – *належить*, є елементом множини: $x \in \{1; 2; 5\}$ або належить множині чисел 1; 2; 5.

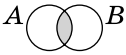
$\subset$ – *міститься*, є підмножиною: $\{x; y\} \subset N$ – числа x і y належать множині натуральних чисел, $\{x; y\}$ – підмножина N.

$\Rightarrow$ – *випливає* (знак логічного слідування): $x \in A \Rightarrow x \in B$ – завжди A є підмножиною B.

$\Leftrightarrow$ – *знак рівносильності*: $x \in A \Leftrightarrow x \in B$ – множини A і B збігаються.

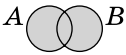
$\cap$ – *перетин*, *математичне «і»*:

$$x \in (A \cap B) \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in B \end{cases}$$



$\cup$ – *об'єднання*, *математичне «або»*:

$$x \in (A \cup B) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in A \\ x \in B \end{array}\right.$$



$\triangleq$ – позначимо; $x^2 \triangleq t$ – x^2 позначимо через t.

$\equiv$ – тотожна рівність.

р. н. – розв'язків немає.

ст. к. – сторонній корінь.

$x_В$ – абсциса вершини параболи.

$y_В$ – ордината вершини параболи.

Додаток

Програма курсу за вибором
«РОЗВ'ЯЗУВАННЯ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ ТА ЇХ СИСТЕМ»
для учнів 10-х (11-х) класів загальноосвітніх навчальних закладів[1]

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

Задачі на розв'язування алгебраїчних рівнянь та систем рівнянь традиційно включають до завдань ДПА, ЗНО та різноманітних математичних змагань.

Мета курсу – закріпити навички розв'язування алгебраїчних рівнянь та систем рівнянь; узагальнити, розширити й поглибити знання учнів з відповідних тем курсу алгебри; розглянути деякі нестандартні методи розв'язування рівнянь та їх систем, задачі підвищеної складності.

Вивчення курсу розраховано на 34 академічні години. Розподіл годин є орієнтовним. Тематичне та дидактичне наповнення може корегувати вчитель залежно від потреб та індивідуальних особливостей учнів.

Під час опрацювання курсу пропонований посібник рекомендовано як основний.

Зміст навчального матеріалу, кількість годин	Навчальні досягнення
Тема 1. Раціональні рівняння (8 год) Квадратне рівняння. Теорема Вієта (пряма і обернена). Біквадратне рівняння. Ціле раціональне рівняння. Теорема Безу. Розкладання многочлена на множники. Рівняння вищих степенів. Методи розв'язування рівнянь вигляду:	Учень (учениця): – *розпізнає* раціональні рівняння та ті їх типи, що розглядалися під час опрацювання теми; – *визначає* степінь рівняння;

[1] Інші програми курсів за вибором та методичні матеріали до них можна знайти на сайті автора *www.apostolova.com.ua*

$(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) = m$, де $a + b = c + d$ та $(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) = x^2$, де $ab = cd$. Методи розв'язування симетричних і зворотних рівнянь. Розв'язування рівнянь методом виділення повного квадрата. Розв'язування рівнянь методом заміни змінної. Однорідні рівняння. Метод уведення параметра замість сталого коефіцієнта рівняння. Використання властивостей монотонної функції для розв'язування рівнянь	– *формулює* теорему Вієта та обернену до неї; теорему Безу; – *пояснює* поняття монотонності функції; – *застосовує* набуті знання до розв'язування раціональних рівнянь
Тема 2. Ірраціональні рівняння (8 год) Методи розв'язування рівнянь вигляду: $\sqrt{f(x)} = \varphi(x)$; $\sqrt{f(x)} = \sqrt{\varphi(x)}$; $\sqrt{f(x)} \cdot \sqrt{\varphi(x)} = 0$. Розв'язування рівнянь методом заміни змінної. Розв'язування рівнянь методом виділення повного квадрата. Розв'язування рівнянь вигляду: $\sqrt[n]{\pm x^p + a} \pm \sqrt[m]{\pm x^p + b} = c$ та $\sqrt{ax + b} \pm \sqrt{cx + d} =$ $= \sqrt{nx + m} \pm \sqrt{kx + l}$, де $a + c = n + k$. Розв'язування рівнянь у разі, коли: – усе «може вирішити» ОДЗ;	Учень (учениця): – *розпізнає* ірраціональні рівняння; окремі типи рівнянь, що розглядалися під час опрацювання теми; – *пояснює* поняття: ОДЗ, взаємно обернені функції; спряжені вирази; – *формулює* властивості похідних пропорцій; – *застосовує* набуті знання до розв'язування

– рівняння містить вираз вигляду $\sqrt{f(x)\varphi(x)}$; – права і ліва частини – взаємно обернені функції; – рівняння має вигляд $f(z) = f(t)$ або зводиться до нього; – рівняння містить суму трьох кубічних коренів; – рівняння містить похідні пропорції. Використання властивостей монотонної функції для розв'язування рівнянь. Розв'язування рівнянь з використанням множення на спряжений вираз	ірраціональних рівнянь
Тема 3. Системи раціональних рівнянь (8 год) Система двох лінійних рівнянь з двома невідомими. Методи розв'язування систем двох рівнянь з двома змінними: – спираємося на теорему, обернену до теореми Вієта; – система вигляду: $\begin{cases} F(x, y) = a, \\ f_1(x, y) \cdot f_2(x, y) = 0; \end{cases}$ – використовуємо алгебраїчне додавання. Симетричні системи. Однорідні системи. Методи розв'язування систем трьох рівнянь з трьома змінними: – спираємося на теорему, обернену до теореми Вієта; – кругові системи. [Метод Крамера]	Учень (учениця): – *розпізнає* системи раціональних рівнянь; окремі типи систем, що розглядалися під час опрацювання теми; – *формулює* теорему, обернену до теореми Вієта для рівнянь другого й третього степенів; – *застосовує* набуті знання до розв'язування систем раціональних рівнянь

Тема 4. Системи дробово-раціональних рівнянь (2 год)	Учень (учениця): – *застосовує* набуті знання до розв'язування систем дробово-раціональних рівнянь
Тема 5. Системи ірраціональних рівнянь (6 год)	Учень (учениця): – *застосовує* набуті знання до розв'язування систем ірраціональних рівнянь
***Резервний час* – 2 год**	

Література

1. *Гайштут О. Г.* Розв'язування алгебраїчних задач. – К.: Рад. шк., 1991.
2. *Яремчук Ф. П.*, *Рудченко П. А.* Алгебра и элементарные функции. – К.: Наук. думка, 1987.
3. *Апостолова Г. В.* Прийомчик треба знати! – К.: Факт, 1995.
4. *Ясінський В. В.* Математика: Навч. посіб. для слухачів ФДП НТУУ «КПІ». – К.: НТУУ «КПІ», 2005.
5. *Шунда М. Н.* Практикум-задачник з математики. – Вінниця: ДП «Державна картографічна фабрика», 2009.
6. *Каплан Я. Л.* Рівняння. – К.: Рад. шк., 1968.